MECÂNICA DO CONTÍNUO: FUNDAMENTAÇÃO PARA A INTERPRETAÇÃO EM GEOLOGIA ESTRUTURAL

Anderson Moraes

Introdução

Neste texto procurar-se-á destacar como a Mecânica do Contínuo, a base de sustentação teórica da Geologia Estrutural, auxilia na interpretação tectônica em suas diversas escalas. Ainda, em especial, serão salientados alguns pontos que evidenciam como o pouco domínio dos conceitos acerca da Mecânica do Contínuo poderia levar a interpretações menos abrangentes ou mesmo abordagens incorretas no trato dos objetos da Geologia Estrutural, isto é, as estruturas geológicas de origem tectônica.

Ressalta-se que não se deve esperar aqui que haja um detalhamento na exposição da Mecânica do Contínuo em si e, menos ainda, a apresentação e a discussão de resultados específicos de trabalhos e projetos.

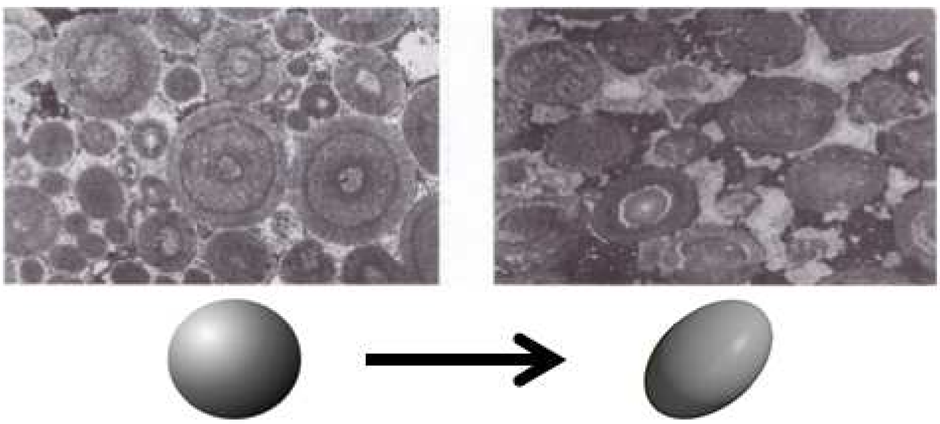
Mecânica do Contínuo e Geologia Estrutural

A Mecânica do Contínuo é a aplicação da mecânica clássica newtoniana no estudo dos corpos espaciamente contínuos, conceituados genericamente como um agregado de partículas materiais, sólidas ou fluidas, que se estabelece como a menor unidade possível mas a ponto de abarcar as grandezas e propriedades físicas de um meio. A Engenharia a incorpora como ferramental para a solução de problemas acerca de sólidos e de fluidos desde o século XVIII. Por sua vez, na Geologia Estrutural tornou-se explicita e sistematicamente o arcabouço para o entendimento do comportamento dos materiais geológicos (i.e. rochas e solos) somente pouco antes do meio do século XX.

Conceitos caros à Geologia Estrutural como tensor de tensão, vetor de deslocamento, tensores de deformação infinitesimal e finita, tensor de taxa de deformação, tensores gradiente de deslocamento, de deformação e de velocidade, vorticidade, comportamentos reológicos, critérios de ruptura, dentre muitos outros, são plenamente abordados e formulados pela Mecânica do Contínuo. No artigo Means (1990), o autor destacava que a literatura em

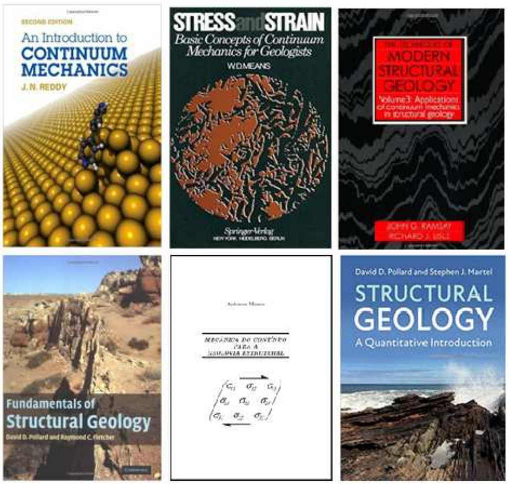
Geologia Estrutural fazia progressivamente cada vez mais uso de conceitos da Mecânica do Contínuo (o que vale para ainda hoje). Contudo, o autor já alertava que o treinamento dos estudantes nesse tópico encontrava-se defasado. Tal quadro, de uma forma geral, também vale para hoje em dia, o que, em termos pátrios, fica evidenciado ao se fazer uma inspeção dos currículos dos cursos de graduação em Geologia.

Os modelos em Geologia Estrutural, de uma forma ou outra, fundamentam-se em conceitos intrínsecos da Mecânica do Contínuo. Os modelos conceituais e descritivos, mesmo eles, recorrem a relações geométricas e cinemáticas heterogêneas, progressivas ou não, que procuram se harmonizar a quadros dinâmicos regionais ou locais. Por sua vez, os modelos físicos ora quantificam diretamente as tensões e deformações envoltas, como se faz em experimentos de laboratório de mecânica de rochas e de solos, ora necessitam de análises dimensionais rigorosas, como nos modelos por materiais análogos (modelos "caixa de areia"). Por fim, os modelos matemáticos, analíticos e numéricos, encerram todas suas formulações, evidentemente, baseadas na Mecânica do Contínuo. Assim, desde o cálculo da deformação em seixos até os sofisticados modelos numéricos hodiernos de deformação em escala listosférica, é a Mecânica do Contínuo que os embasa. A fundamentação dos modelos em Geologia Estrutural pela Mecânica do Contínuo não deveria causar estranhamento algum, pois o comportamento mecânico dos materiais de forma ampla (e.g. metais, concretos, cerâmicas, ossos, dentes) são deliberamente estudados através da Mecânica do Contínuo. Dessa forma, os materiais geológicos encerram-se nesse quadro maior. Por exemplo, a deformação de um óolito inicialmente com forma de uma esfera levao-o a uma forma de um elipisoide. A Mecânica do Contínuo possibilita trabalhar esse quadro deformacional, assumindo-se algumas premissas, de forma plenamente satisfatória.



Como motivações para se estudar as bases da Mecânica do Contínuo envolta na Geologia estrutural, preconiza-se que seu domínio: (i) possibilite interpretações mais críticas e abrangentes, (ii) estruture melhor pesquisas e trabalhos futuros e (iii) facilite o entendimento de boa parte da literatura atual de modo mais confortável. Basicamente, no dizer de Kurt Lewin: “There is nothing so practical as a good theory”.

Com o intuito de se obter fundamentos da Mecânica do Contínuo sugure-se o livro Reddy (2013), alertando que há uma grande quantidade de outros textos muito bons. No que concerne ao tratamento da Mecânica do Contínuo acerca especificamente da Geologia Estrutural, são sugeridos os livros Means (1976), Ramsay e Lisle (2000), Pollard e Fletcher (2005), Moraes (2016) e Pollard e Martel (2020).



Mecânica do Contínuo Balizando a Interpretação em Geologia Estrutural

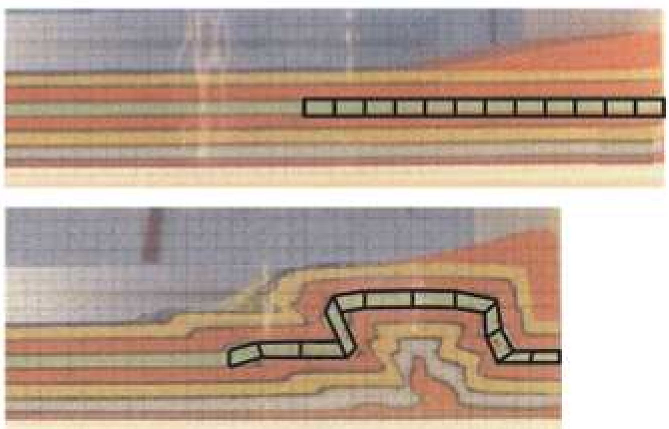
Serão apresentados alguns exemplos de como a Mecânica do Contínuo e a modelagem matemática em Geologia Estrutural podem auxiliar as interpretações tectônicas.

Compartimentação da Deformação Heterogênea Regional

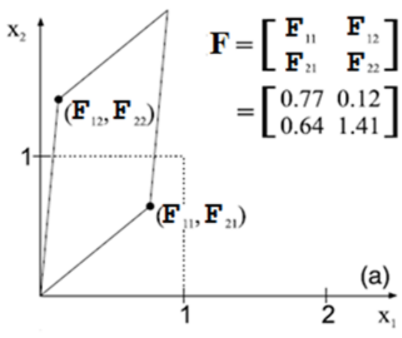
Com a disponibilização de marcadores geológicos da deformação, pode-se procurar setorizar porções onde a deformação é relativamente homogênea quando se tem um quadro de deformação regional heterogênea. Conjecturando-se sobre as relações geométricas entre o deformado e o indeformado, pode-se estabelecer através do tensor gradiente de deformação:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \text{ e } F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

onde X_i e x_i são as coordenadas iniciais (indeformado) e finais (deformado), as porções onde se tem deformações relativamente homogêneas, quando F_{ij} encerra componentes relativamente constantes ao se considerar um erro aceitável. Por exemplo, tomando-se um experimento por materiais análogos, tem-se a seguinte relação entre o indeformado e o deformado:



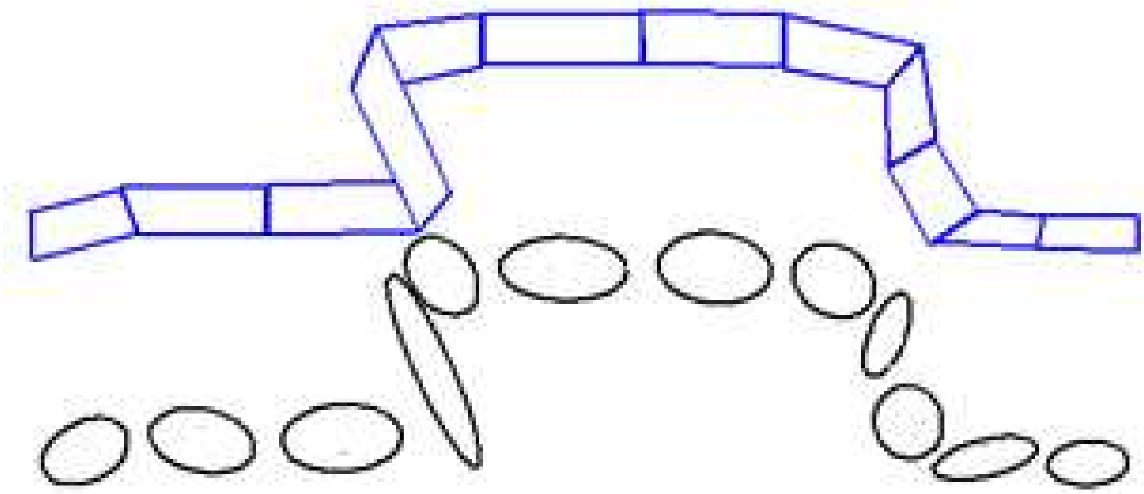
Do ponto de vista prático, as componentes de F_{ij}, podem ser obtidas para cada elemento discretizado facilmente através de um algoritmo que extraia as coordenadas iniciais e finais locais como:



De posse dos tensores gradiente de deformação F_{ij} em cada elemento da discretização, pode-se caracterizar a deformação finita em cada setor de interesse por intermédio de:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - F_{ji}^{-1}F_{ij}^{-1})$$

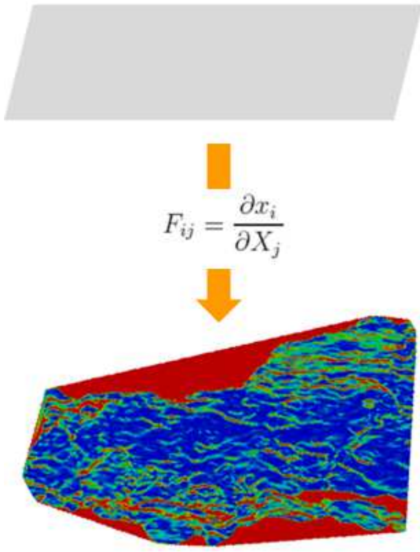
onde E_{ij} é o tensor de deformação finita e δ_{ij} é o delta de Kronecker (valendo 1 quando i = j e 0 quando i ≠ j). Dessa forma, podem-se estabelecer as deformações finitas por setor:



Neste exemplo, sem dúvida, há uma relação muito clara entre o indeformado e o deformado por se tratar de um experimento físico. Contudo, em estudos de mapeamento regional, podem ser elencados determinados marcadores geológicos da deformação e estruturas que possibilitem uma aplicação análoga ao que foi mostrado.

Análise da Deformação Finita em Mapa de Subsuperfície

De posse de um mapa de determinada camada em subsuperfície, ao se supor uma geometria inicial para ela, é possível determinar suas porções mais e menos deformadas de forma absoluta ou relativa através do tensor gradiente de deformação F_{ij}, como posto anteriormente. Por exemplo, suponde-se que a camada era inicialmente sub-horizontal, de posse de suas profundidades atuais, pode-se estabelecer as deformações relativas ao longo dela:



onde as cores quentes representam as porções mais deformadas. Note que, em se tendo informações paleoambientais, pode-se prescindir de se assumir que a camada era tão somente sub-horizontal. Ainda, para regionais que sofreram a ação de eventos neotectônicos, a topografia pode ser utilizada como o balizador das deformações regionais.

Modelagem Numérica na Interpretação Estrutural

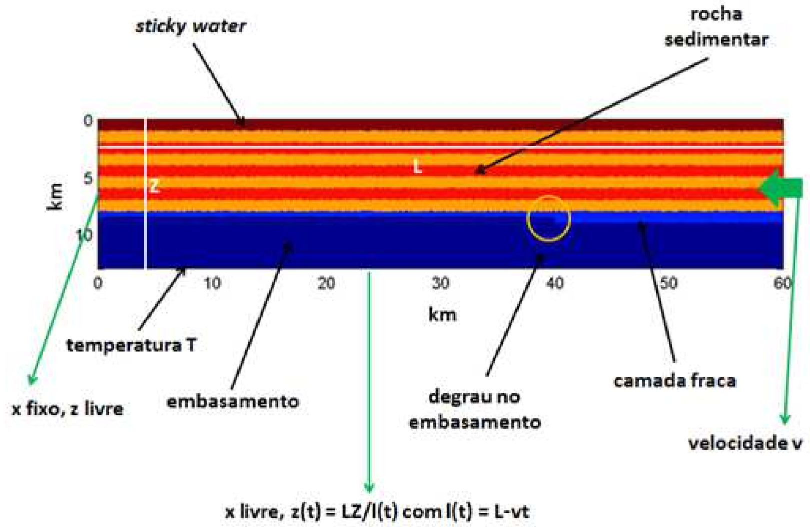
A modelagem numérica tem se tornado cada vez mais uma ferramenta notável e mesmo fundamental em tectônica, principalmente nas últimas décadas. As equações condicionantes do comportamento dos materiais geológicos (i.e. da continuidade, de conservação do momento, de fluxo material e de estado) são resolvidas com variáveis níveis de acoplamento através de diversos métodos numéricos (e.g. diferenças finitas, elementos finitos, elementos discretos). Através da modelagem numérica, diversas condições de contorno e iniciais e condicionantes do comportamento mecânico das rochas podem ser testados. A título de exemplo, apresentam-se modelos numéricos elaborados no programa I2ELVIS (veja Gerya (2019) para detalhes) modificado pelo presente autor. O I2ELVIS é um programa que se vale do método das diferenças finitas, possibilitando o acoplamento termomecânico em meio incompressível com reologia viscoelastoplástica com sedimentação e erosão. Foi disposto um encurtamento crustal de 15% em relação ao comprimento inicial do modelo que, a depender das velocidades prescritas, levou a tempos de 0,1 a 5 Ma. As condições iniciais são as seguintes:

Temperatura: 400 e 50 °C

Velocidade: -10 e -0,2 cm/ano

Sedimentação-Erosão: sim e não

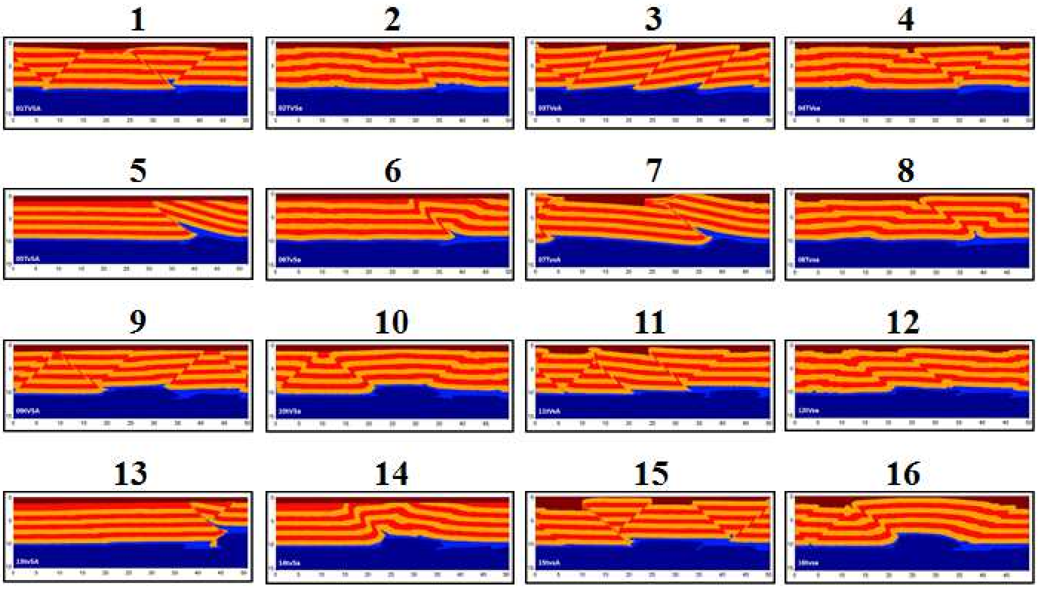
Amolecimento: sim e não



Foram modeladas 16 possibilidades de combinação de temperatura na base do modelo, de velocidade de compressão, de presença ou não de sedimentação-erosão e de condição de amolecimento ou não para a sequência supracrustal:

$2^4 = 16$ modelos	temperatura °C	velocidade cm/a	sedimentação-erosão	amolecimento
01TVSA	400	10	sim	sim
02TVSa	400	10	sim	não
03TVsA	400	10	não	sim
04TVsa	400	10	não	não
05TvSA	400	0,2	sim	sim
06TvSa	400	0,2	sim	não
07TvsA	400	0,2	não	sim
08Tvsa	400	0,2	não	não
09tVSA	50	10	sim	sim
10tVSa	50	10	sim	não
11tVsA	50	10	não	sim
12tVsa	50	10	não	não
13tvSA	50	0,2	sim	sim
14tvSa	50	0,2	sim	não
15tvsA	50	0,2	não	sim
16tvsa	50	0,2	não	não

Assim, chegou-se aos seguintes resultados nas 16 realizações feitas:



Resumidamente, pode-se prognosticar que: (i) o embasamento é muito mais facilmente envolvido na deformação quando se tem temperaturas mais baixas e, portanto, fluxos de calor mais baixos, (ii) taxas de deformação mais altas tendem a levar a um predomínio de falhas sobre dobras e a um maior número de falhas do que apareceria em sistemas com taxas de deformação mais baixas, (iii) onde a sedimentação e a erosão são menos vigorosas a topografia é deveras mais desenvolvida e há predominância de simetrias mais ortorrômbicas e (iv) o amolecimento leva ao aparecimento destacado de falhas no sistema e, por sua vez, a manutenção da rigidez do sistema leva a um prodomínio do dobramento. Em decorrência, é passível de se notar que os diferentes resultados de cada modelo confrontados com determinada área de estudo previamente interpretada possibilitariam indicar as condições, no caso, de fluxo de calor, de vigor da tectônica, do nível de sedimentação e erosão e do comportamento mecânico das rochas quando da deformação do sistema.

Observações do Trato da Mecânica do Contínuo na Interpretação em Geologia Estrutural

Serão agora dispostas algumas considerações e digressões: (i) sobre como o menor domínio da Mecânica do Contínuo por parte do geólogo estruturalista pode dificultar o teste de ideias, levar a interpretações errôneas ou incompletas e mesmo prejudicar a leitura e a escrita de textos e (ii) como uma boa base em Mecânica do Contínuo auxilia em muito o melhor desenvolvimento de trabalhos em Geologia Estrutural.

Utilização de Conceitos da Mecânica do Contínuo de Forma Errônea

Muitos termos e conceitos da Mecânica do Contínuo são a mister expressos de modo pouco preciso ou mesmo de forma incorreta no mundo da Geologia Estrutural. Seguem-se alguns exemplos. O termo tensor geralmente é utilizado tão somente para se referir a tensões, conquanto boa parte das grandezas físicas em Geologia Estrutural são também tensores, e de segunda ordem (e.g. deformação, taxa de deformação). Adicionalmente, corriqueiro é se referir a "direção ou sentido do tensor" quando se postula o posicionamento de uma das tensões principais, o que não têm sentido. Genericamente, o tensor de tensões é um tensor de segunda ordem, de forma que os valores em si de suas componentes depende da orientação do sistema coordenado em uso. Ainda, o conceito de tensões desviadoras é utilizado erroneamento como sinônimo para ou diferencial de tensão ou tensão tectônica ou tensão adicional. Todavia, o que se tem é exato conceito de tensor de tensões desviadoras σ'_{ij}, significando o tensor obtido da subtração das tensões normais pela média das tensões normais e mantendo-se as tensões cisalhantes originais:

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \qquad \sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - p \end{pmatrix}$$

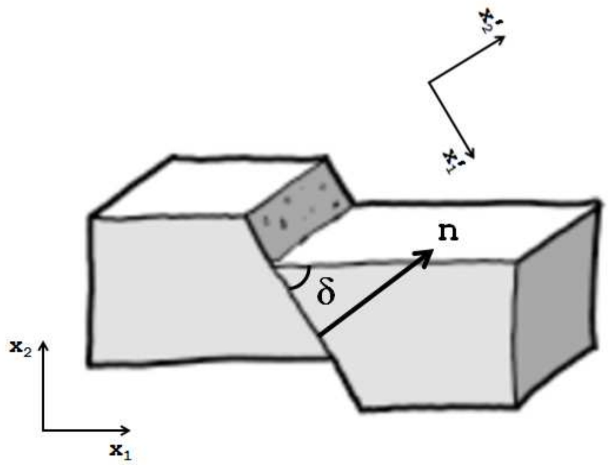
Outro equívoco muito frequente é se referir a fluido newtoniano e fluido não-newtoniano como, respectivamente, os que obedeceriam as leis de Newton ou não. Na verdade, é claro, ambos respeitam as três leis do movimento de Newton, com as expressões significando, na ordem, apenas que em materiais viscosos há uma relação linear ou não-linear entre o tensor de taxas de deformações desviadoras e o tensor de tensões desviadoras.

Tratamento Vetorial de Grandezas Tensoriais de Segunda Ordem

É deveras frequente encontrar um manuseio puramente trigonométrico de componentes de um tensor de segunda ordem ao se querer adequar suas compenentes a determinada geometria de interesse. Diferentemente, o que deve ser levado a cabo é uma tranformação de sistemas coordenados completa através de:

$$\sigma' = A\sigma A^T$$

onde σ e σ' são, respectivamente, tensores se segunda ordem nos sistemas coordenados original e atual e A é o tensor de transformação, que encerra como componentes os cossenos diretores dos eixos dos sistemas coordenados original e atual. Exemplificando, considerando um estado plano de deformação ao longo de $x_3 = x'_3$, ao se objetivar calcular a componente cisalhante em uma falha em um sistema $Ox'_1x'_2$:



não se trata de aplicar tão somente:

$$\varepsilon_{falha} = \varepsilon_{12}\cos\delta$$

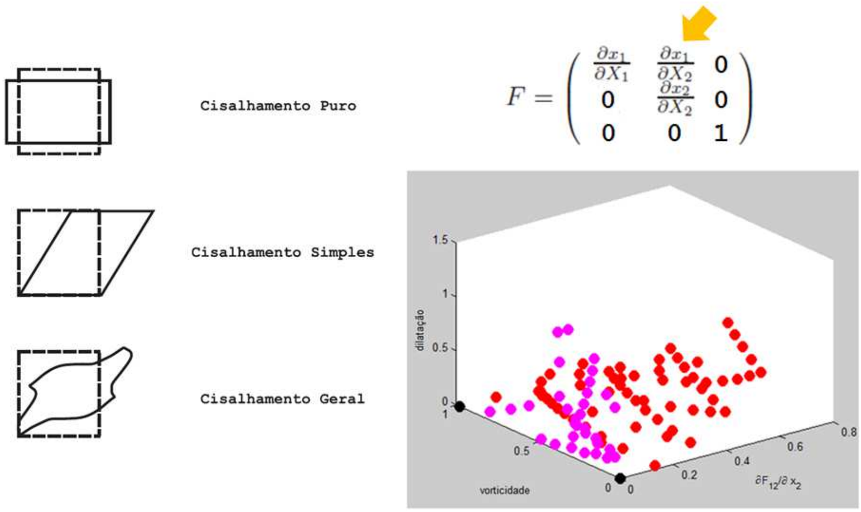
A condução correta é se fazer a transformação de coordenadas do tensor de deformação no sistema original Ox_1x_2 para o tensor de deformação no sistema atual $Ox'_1x'_2$ como indicado mais acima, o que resultaria em:

$$\varepsilon_{falha} = \varepsilon_{12}\cos 2\delta - \frac{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\text{sen}2\delta}{2}$$

Uma inspeção das expressões para ε_{falha} obtidas em cada acepção evidencia que se teria uma forte fonte de erros nos cálculos.

Utilização Predominante dos Cisalhamentos Puro e Simples

Embora boa parte dos quadros deformacionais possam ser aproximados por deformações onde predominam ora cisalhamento puro ora cisalhamento simples, deve-se ter em mente que a realidade deformacional na natureza é muito mais complexa que as definições de cisalhamentos puro e simples e, assim, tais conceitos se referem a dois estados específicos do chamado cisalhamento geral. Ao se graficar dilatação, vorticidade e nível de hetogeneidade:



percebe-se que é mister pensar que os cisalhamentos puro e simples são dois estados pontuais (em preto) em um amplo espectro de possibilidades de quadros de deformação (em magenta e vermelho). Como corolário, sempre que possível, a análise da deformação em ambientes geológicos deve levar em conta um quadro mais amplo de cisalhamento geral.

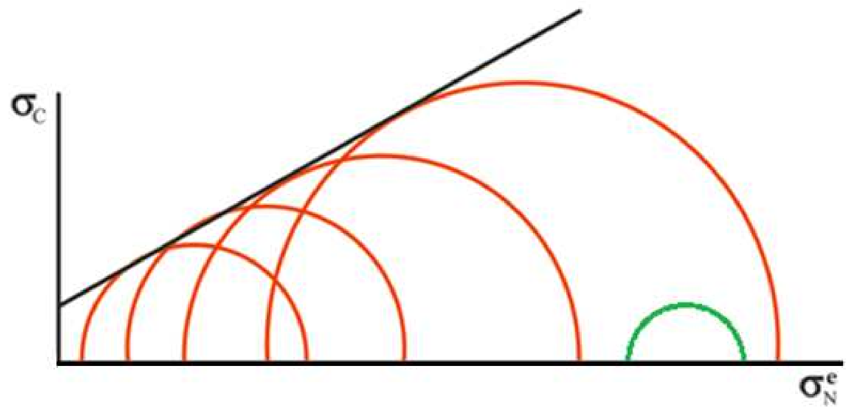
Ideia Recorrente que Maiores Tensões Levam ao Falhamento

Amiúde é feita a associação direta entre maiores níveis de tensão e falhamento em regime rúptil. A geração ou reativação de falhas, fraturas cisalhantes com em sua essência, é controlada pelo diferencial de tensão:

$$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$r = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

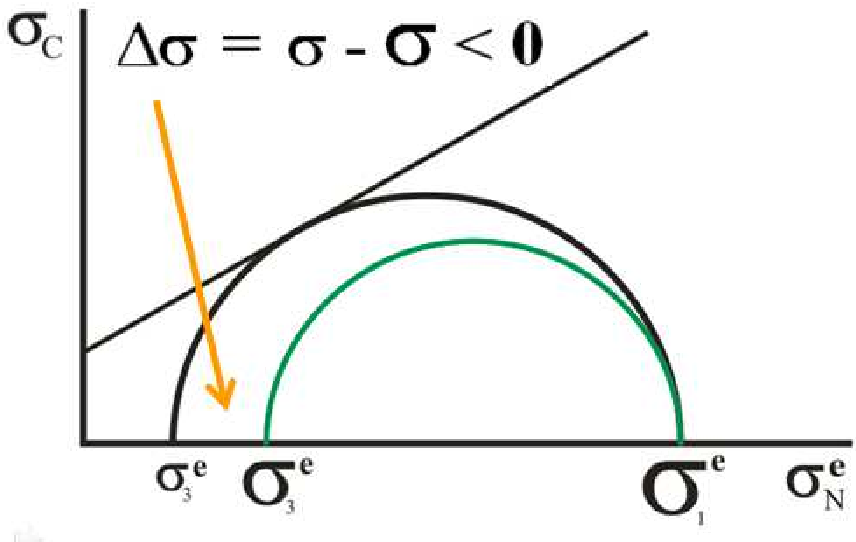
que, em termos de um diagrama de Mohr, relaciona-se diretamente ao raio r do estado de tensão considerado. De fato, graficamente:



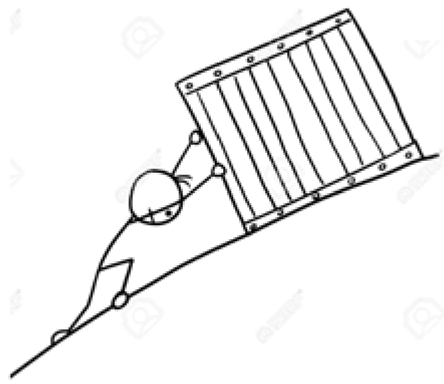
vê-se que a envoltória de ruptura é tocada pelos estados de tensão somente quando as tensões diferenciais são mais elevadas conforme as tensões normais efetivas aumentam (vermelho), isto é, quando se caminha para níveis de maiores tensões. Note que mesmo em um estado de tensão com níveis de tensões normais efetivas altos (verde), contudo com tensão diferencial baixa, a envoltória não é satisfeita, portanto, não ocorrendo falhamento.

Pouco Reconhecimento que Falhas Normais Ocorrem em Estado de Tensão Compressivo

Há deliberadamente a ideia de que as falhas normais se formam quando pelo menos uma das tensões principais é tracional. Contudo, o regime de falha normal significa tão somente que a tensão principal máxima σ_1, em um estado de tensão andersoniano, é a tensão vertical σ_V. Assim, mesmo quando as três tensões principais são compressivas são formadas falhas normais sem qualquer paradoxo. Em um diagrama de Mohr fica claro que, através de uma diminuição da tensão principal mínima σ_3 (mas ainda com ela continuando a ser compressiva) poder-se-ia tocar a envoltoria do critério de ruptura:



Note que momentaneamente o que se tem é um $\Delta\sigma_3$ tracional, pois o σ_3 original seria menor que o novo σ_3, embora todas as tensões principais possam permanecer compressivas. Alegoricamente, pode-se pensar que ao se empurrar uma caixa ao longo de uma rampa:



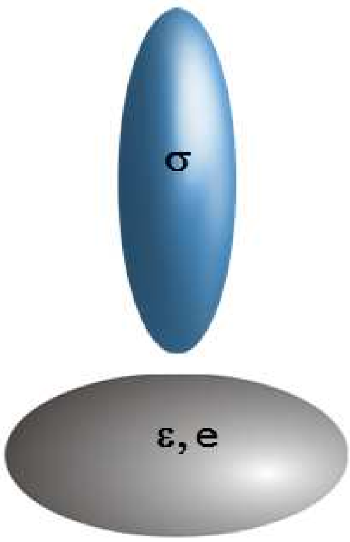
caso a força de empurrão aplicada seja diminuída por algum motivo, a caixa pode descer a rampa, ainda que a pessoa que a empurra só tenha diminuído o valor da força aplicada e não o seu caráter de ser uma força de empurrão. Ou seja: a pessoa não puxou a caixa para si!

Compreensão Total dos Métodos Quantitativos de Análise da Deformação e de Inversão de Tensões por Falhas

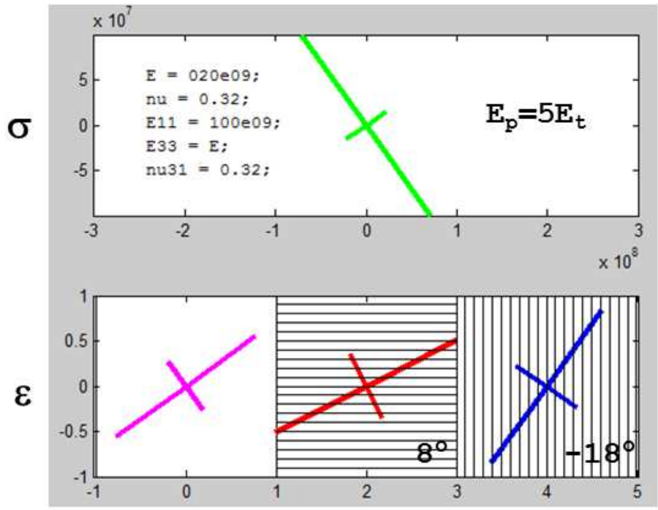
A real compressão dos inúmeros métodos quantitativos de análise da deformação finita através de marcadores de deformação geológicos e os diversos métodos de inversão para paleotensões através de fraturas e falhas é embasada pela Mecânica do Contínuo. Todavia, muitas vezes, quando da exposição de muitos dos princípios desses métodos em alguns textos em Geologia Estrutural, não fica clara a conexão entre a essência e as premissas assumidas por esses métodos e as formulações intrínsecas da Mecânica do Contínuo. Por exemplo, muitos métodos se valem das otimizações na busca de autovalores e autovetores para o tensor de deformação ou na determinação da decomposição das tensões normais e cisalhantes em planos.

Uso de Relações Imediatas entre Tensões e Deformações/Estruturação

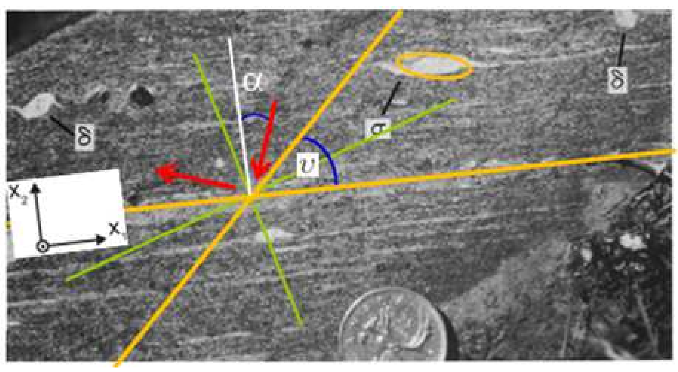
Relações entre tensões, deformações e taxas de deformação são, de um modo geral, muito mais complexas que o normalmente posto. É comumente apresentada a ideia de coaxialide entre os tensores de tensões principais e de deformações principais (infinitesimal e, mesmo, finita):



Sem dúvida, esta é uma simplificação tão somente aceitável para uma discussão rápida, superficial, por exemplo, quando da inspeção de algum afloramento. Contudo, a coaxialidade entre tensores de tensões principais e de deformações principais raramente é sustentada ao longo do processo de estruturação das rochas, em especial no que se refere a deformações finitas. De imediato, mesmo considerando-se o comportamento elástico, a presença de anisotropias intrinsecas ou de descontinuidades nos materiais ilustra isto facilmente.



Para um mesmo carregamento de tensão fixo (verde), a deformação em um meio isotrópico (magenta) ostentaria a coaxilidade entre tensão e deformação. Porém, para um meio transversalmente isotrópico (vermelho e azul), onde uma direção encerra rigidez maior que àquela ortogonal a ela, ocorreria desvios significativos entre os quadros de tensão e de deformação, e mais ainda quando a tensão principal máxima faz um ângulo menos vigoroso em relação à direção de rigidez mais alta. Note que o tensor de deformação principal rotaciona para sentidos até contrários. Evidentemente, quando se considera comportamento dúctil, tal quadro poderia ficar ainda mais excerbado e de difícil análise. Em adição, levando-se em conta mesmo somente as deformações, geralmente, os incrementos tipificados pelo tensor de taxas de deformações infinitesimais não são coaxiais ao tensor de deformações finitas, aquele que leva ao estado de deformação acumulado, pois há rotação interna das linhas materiais. Outro componente complicador, ainda que se reconheça a não-coaxialidade das deformações incrementais e finitas, é com que intensidades e por quanto tempo tal quadro foi sustentado quando da geração das estruturaas geológicas analisadas:



Considerando o tensor gradiente de velocidade:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

onde v_i é a velocidade, as linhas materiais ao longo do tempo obedeceriam a expressão:

$$\frac{DL}{Dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + v \cdot \nabla L$$

onde D/Dt é a derivada material. Assim, para a condição de equilíbrio estacionário dever-se-ia ter:

$$\frac{DL}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \text{ e } \nabla L = 0$$

Em palavras, o campo de velocidades incremental (vermelho) teria que ser mantido em magnitudes e direções para se considerar uma progressão estacionária. Como corolário, quadros de deformação finita e estruturas formadas ao longo de tempos geológicos mais avantajados dificilmente encerrariam relações diretas entre incrementos de deformação e deformações acumuladas. De tudo que fora exposto, em síntese, a possibilidade de estabelecimento de relações imediatas e perenes entre tensões, deformações instantâneas e deformações finitas deve ser encarada como exceção e não regra em ambientes geológicos.

Relações entre Dobramento, Tensões, Deformações e Fraturamento

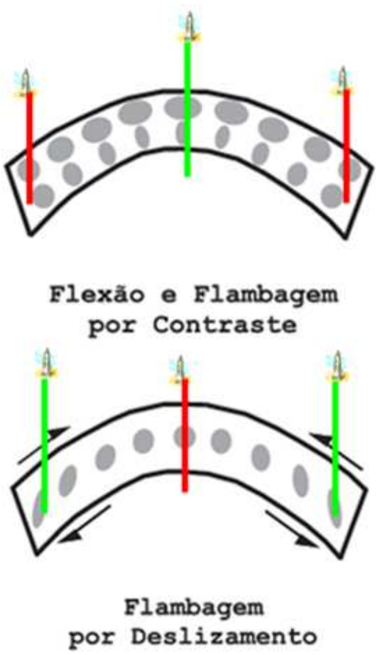
Na exploração de petróleo em regiões dobradas comumente objetiva-se delinear onde os reservatórios podem se encontrar mais fraturados. Há uma aceitação geral que as porções de charneira das dobras seriam os sítios mais propícios para se encontrar fraturamento mais intenso. Tal contexto se liga diretamente à ideia de que a charneira da dobra seria a porção mais deformada quando da instauração do dobramento. Deve-se notar, contudo, o que é observado em poucos trabalhos, que a depender do mecanismo de dobramento, ter-sei-ia situações completamente distintas no que se refere à distribuição regional das porções mais deformadas ao longo das dobras. Nos mecanismos de dobramento por flexão e por flambagem por contraste a deformação principal máxima é dada por:

$$e_1 = x_3 \left(\frac{d^2 A}{dx_1^2} \right)$$

onde A é a amplitude da dobra, de forma que d^2A/dx^2_1 é a curvatura da dobra. Por sua vez, no mecanismo de flambagem por deslizamento, a deformação principal máxima é computada através de:

$$e_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\tan^2\alpha + \tan\alpha\sqrt{\tan^2\alpha + 4}\right) + 1} - 1$$

onde α é o mergulho da camada. Assumindo-se que maiores deformações levam a fraturamentos mais intensos, uma inspeção das expressões anteriores evidencia que as porções mais deformadas estariam nas zonas de charneira e de inflexão dos flancos, respectivamente, no primeiro e segundo casos. Em outras palavras, as regiões mais fraturadas teriam se desenvolvido em áreas bem distintas em cada caso:



Deve-se salientar que como o processo de dobramento pode envolver distintos mecanismos no espaço e no tempo geológicos, modelos numéricos evolutivos bem construídos podem auxiliar em muito na predição das porções mais fraturadas.

Quantificação e Estimativas de Ordens de Grandeza

A Mecânica do Contínuo encerra formulações de seus fundamentos e de relações constitutivas que possibilitam que se quantifique ou, pelo menos, se faça estimativas de ordem de grandeza de alguns contextos tectônicos de forma mais ampla e segura. Por exemplo, tendo em mente os limites de resistência das rochas, é fundamental verificar se em eventuais modelos numéricos em escala crustal são obtidos valores para tensões que gravitam por volta de até alguns MPa e não alguns GPa. Em escala litosférica, taxas de deformação menores que 10^{-16} s^{-1} são pouco prováveis de ocorrerem, o que pode auxiliar na calibração de modelos numéricos. Ainda, a quantificação da deformação finita com balizamento por dados geocronológicos deve ser compatibilizada com taxas de deformação coerentes com a cinemática de placas tectônicas (veja Pfiffner e Ramsay (1982) como excelente exemplo). Tomando-se de forma imediata o conceito de taxa de deformação:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\Delta \mathrm{e}}{\Delta t}$$

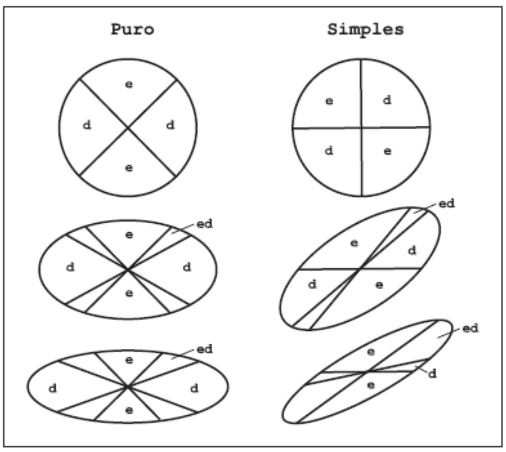
onde Δe é a variação de deformação finita acumulada no intervalo de tempo Δt, cálculos simples sugerem, em regime de equilíbrio estacionário, relações entre magnitudes de deformação alcançados, taxas de deformação envolvidas e as faixas de tempo necessárias para o acúmulo das deformação:

$$\begin{array}{ccccc} & & 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1} & & \text{dia} \\ 30\% & \longrightarrow & 10^{-9}\ \mathrm{s}^{-1} & \longrightarrow & \text{ano} \\ & & 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1} & & \text{milhão de ano} \end{array}$$

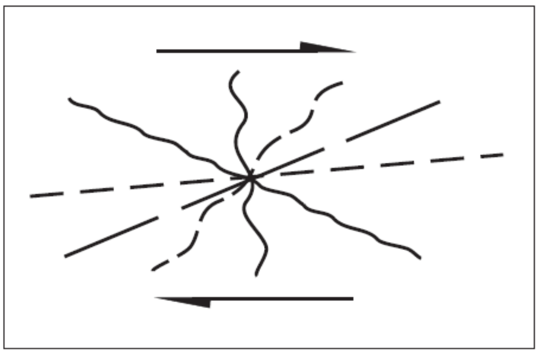
Em resumo, a manipulação da formulação intrínseca proporcionada pela Mecânica do Contínuo possibilita que seja estabelecido um panorama quantitativo para estudos tectônicos através de estimativas de valores compatíveis aos que ocorrem em ambientes geológicos.

Número Maior de Fases de Deformação em Detrimento à Deformação Progressiva

A discussão sobre o caráter das deformações geológicas, isto é, se progressivo ou em fases bem delimitadas, permanece ainda com muito vigor na literatura. Amiúde, há um procedimento de se impor um número exagerado de fases de deformação quando da análise tectônica de uma região, e com denominações frequentemente até confusas. No dizer de Fossen (2019): "Reading papers on Brazilian geology, one can easily get the impression that there are more phases of deformation in Brazil than elsewhere". À parte a celeuma que fora criada em torno de tal escrito, é necessário aceitar que ele carrega uma boa carga de razão. Como poderia a Mecânica do Contínuo contribuir para tal discussão? De uma forma geral, ela possibilita que se explique várias associações estruturais como oriundas de um processo contínuo de acúmulo de deformações. Algumas características gerais das deformações geológicas como, a saber, a não-coaxialidade entre os campos de tensões, de deformações e de taxas de deformação, a resposta cumulativa das rochas à imposição das deformações e a presença de blocos com geometrias, com propriedades mecânicas e com comportamentos reológicos diversos contrapostos operam para favorecer um quadro possível de aceitação da ideia de deformação progressiva. Por exemplo, mesmo considerando tão somente as deformações progressivas por cisalhamento puro ou por cisalhamento simples isoladamente pode-se ver a complexidade estrutural ao longo da história da deformação:



Realmente, observando os estágios progressivos para os cisalhamentos puro e simples, vê-se que em ambos há porções com somente encurtamento, com encurtamento inicial e distensão final e com somente distensão. Note que no cisalhamento puro há uma simetria dessas regiões, ao passo que no cisalhamento simples há uma assimetria. A delimitação dessas porções se dá ao se sobrepor as deformações infinitesimais incrementais principais com as deformações finitas acumuladas principais. Evidentemente, ao se levar em conta um quadro de cisalhamento geral pode-se imaginar uma maior complexidade nas relações mecânicas e estruturais, o que seria um terreno mais profícuo ainda para se procurar precipitadamente definir fases de deformação distintas no espaço e no tempo. De fato, o cisalhamento geral pode imprimir para uma mesma linha material, com a progressão do quadro de deformação, um estado de distensão e de encurtamento, em qualquer ordem e com um podendo predominar ou não sobre o outro. Por exemplo, o cisalhamento supersimples pode levar a porções com somente encurtamento, com distensão inicial e encurtamento final, com encurtamento inicial e distensão final e com somente distensão. Mais ainda, a deformação progressiva pode elucidar o porquê de ocorrerem feições distensionais e compressionais no mesmo evento tectônico ou mesmo o fato de estruturas inicialmente puramente compressionais sofrerem distensão de várias magnitudes com a progressão da deformação:



Em síntese, na verdade, o reconhecimento do papel da deformação progressiva se deveu à incorporação sistemática dos conceitos da Mecânica do Contínuo na interpretação em tectônica. De fato, o reconhecimento da não-coaxialidade entre tensão, deformação e taxa de formação como regra e não exceção e da resposta cumulativa dos meios contínuos à imposição das deformações determinou a maior consideração da deformação progressiva em Geologia Estrutural. Contudo, é inegável que com a evolução espacial dos terrenos geológicos no tempo, o quadro de tensão encerre de fato magnitudes e orientações deveras distintas, o que implicaria na possibilidade de se ter deformações em fases bem marcadas e com estruturas geometricamente bem diferenciadas.

Compreensão das Premissas Utilizadas pelos Autores em Artigos

A representação de fenômenos nas ciências passa necessariamente pela adoção de modelos. Espeficicamente na Geologia Estrutural, mesmo os modelos conceituais, e mais ainda os modelos matemáticos, se baseiam nos conceitos e formulações da Mecânica do Contínuo. A abrangência, a relevância e a aplicabilidade desses modelos dependem das hipóteses consideradas, e muitas delas podem ser expressas objetivamente ou não através de equações e expressões matemáticas da Mecânica do Contínuo. Em outras palavras, a real compreessão de um modelo tectônico pode passar pelas premissas físico-matemáticas adotadas como base na confecção desses modelos. A título de exemplo, tomando-se a equação de Navier-Stokes para um meio com comportamento viscoso:

$$\left(\frac{\eta}{3}\right)\left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho \dot{v}_i$$

onde η é a viscosidade, p é a pressão e ρX_i é um termo que se relaciona às forças volumétricas (geralmente a gravidade) pode ser simplificada para:

$$\eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho X_i = 0$$

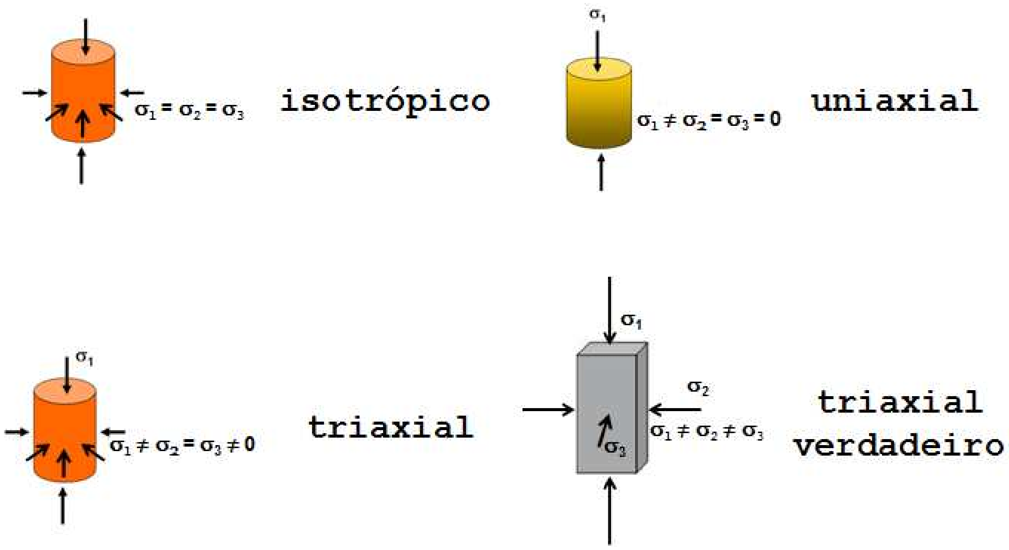
ao se assumir que o meio é incompressível (dilatação nula) e ao se desprezar as forças inerciais (aceleração do sistema nula), portanto, na ordem:

$$\nabla \cdot v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$
$$\dot{v}_i = 0$$

Nesse contexto, evidentemente, não se poderia extrapolar os resultados de modelos assim concebidos para interpretações geológicas onde há ganho ou perda de volume ou ocorrem acelerações e desacelerações (e.g. devido a sismos) no sistema. Como uma alerta final, a prática comumente enraizada em muitos leitores de “pular a parte matemática” em artigos pode levar a conclusões parciais, precipitadas e equivocadas.

Utilização Pouco Crítica de Propriedades Físicas Obtidas de Laboratório de Mêcanica de Rochas em Modelos Numéricos

A conexão entre as formulações constitutivas e de ruptura e os dados obtidos em experimentos de laboratório de mecânica de rochas possibilita levantar um maior questionamento quando da utilização de propriedades mecânicas em modelos analíticos e, principalmente, numéricos. Um ponto importante é ter em mente o tipo de experimento:



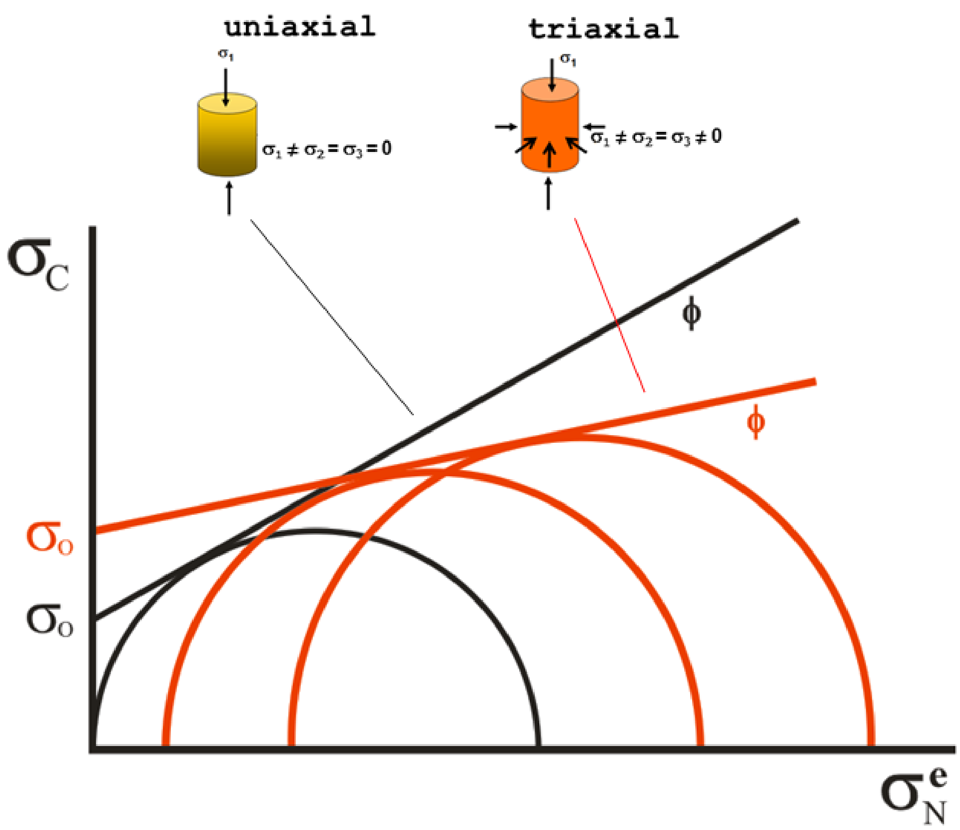
e as condições amplas em que eles foram feitos. Ensaios uniaxiais podem dar uma noção imediata da resistência das rochas, mas deve-se lembrar que se referem a experimentos sem confinamento. Experimentos triaxiais e triaxiais verdadeiros, ensaios conduzidos com confinamento, são mais adequados para captar as condições das rochas em profundidade. Na determinação da envoltória de Mohr-Coulomb, o primeiro somente possibilitaria calcular o ângulo de atrito interno caso se formasse uma fratura cisalhante através de:

$$\theta = \pm\left(45^\circ - \frac{\phi}{2}\right)$$

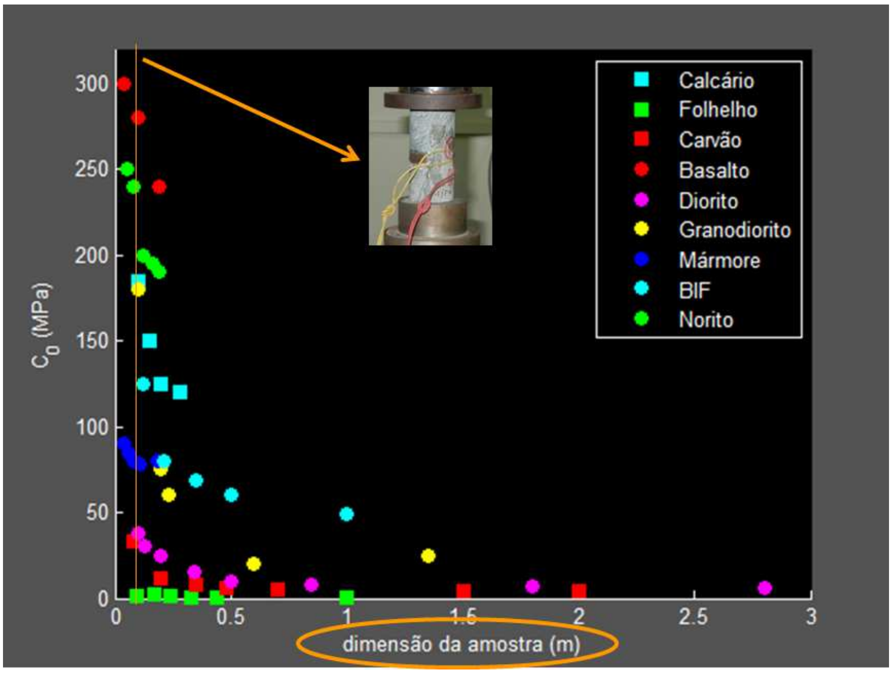
onde θ é o ângulo entre a fratura e a tensão principal máxima, direção axial de carregamento no experimento, e ϕ é o ângulo de atrito interno. Todavia, vale uma advertência: devido à falta de confinamento no ensaio uniaxial, geralmente os θ são baixos e, assim, chega-se a valores de ϕ muito altos. Como corolário, da relação entre a resitência à compressão unixial C_0 e a coesão σ_0 em um ensaio uniaxial:

$$C_0 = \frac{2\sigma_0 \cos\phi}{1 - \sin\phi}$$

seriam obtidos valores para a coesão muito baixos:



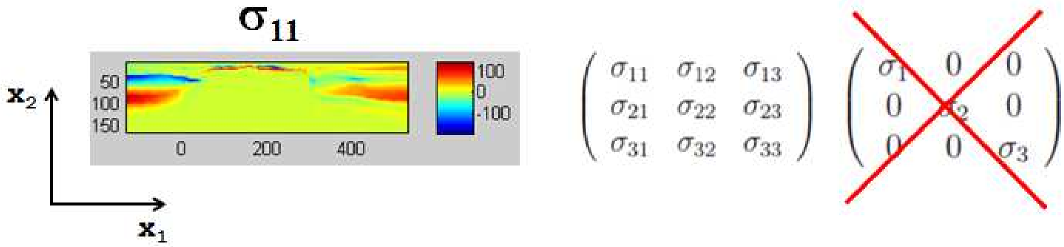
Adicionalmente, um ponto muito pouco considerado, é a dependência de escala das propriedades mecânicas, ainda que, por seu cabedal teórico, a Mecânica do Contínuo (a clássica, pelo menos) seja indiferente à escala. De fato, experimentos realizados com amostras de vários tamanhos revelam que quanto maior as dimensões da amostra, de um modelo geral, menores são os valores da resistência da rocha obtidos:



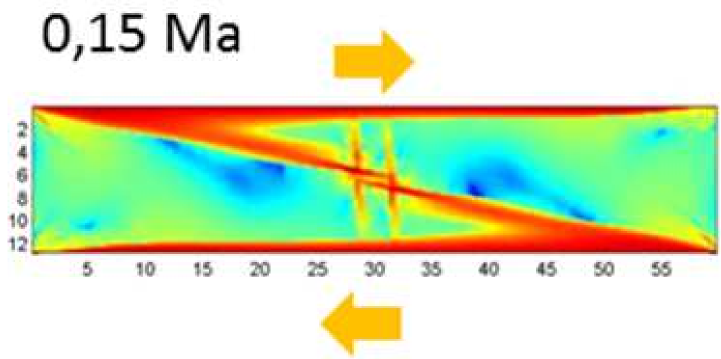
Note que para amostras com dimensões métricas haveria uma certa estabilização dos valores obtidos. Como consequência, transferir diretamente valores de propriedades de resistência das rochas obtidos em amostras-padrão (dimensão de poucos centímetros) para uma escala regional pode levar a problemas de interpretação geológica e, o que é pior, de mau dimensionamento em projetos de geoengenharia.

Base para Interpretações dos Resultados Obtidos em Modelos Numéricos

A utilização de resultados de modelagens numéricas próprias ou de outrem requer, indubitavelmente, um conhecimento pelo menos básico da Mecânica do Contínuo. Os diversos programs computacionais disponíveis encerram inúmeras saídas gráficas de diversas grandezas físicas e parâmetros. Elas podem auxiliar na exposição de interpretações tectônicas mas algumas vezes, mal escolhidas ou lidas, podem mesmo obscurecer tais interpretações. Seguem-se algumas considerações para servir de orientativo. Quando são apresentados as componentes de um tensor de segunda ordem, é mister perceber que elas se relacionam a determinado sistema coordenado "default" do programa computacional em uso. Assim, a componente σ_{11} do tensor de tensão, por exemplo, significa que a componente age em uma face cuja direção ortogonal é x_1 e se alinha a esta direção e não é, necessariamente, a tensão principal máxima σ_1:



Uma atenção especial deve ser dada quando se trabalha com taxas de alguma grandeza, pois analisa-se tal grandeza momentaneamente em alguma época do modelo e não a grandeza de forma acumulada até essa época. Frequentemente, objetiva-se acompanhar o esmorecimento de diferenciais de tensão oriundos de carregamentos adicionais impostos ao modelo e, para tal, é muito útil valer-se do segundo invariante do tensor de tensões desviadoras ou das tensões de von Mises. Ainda, é muito popular o desejo de observar a localização da deformação ao interpretá-las como falhas, e o acompanhamento da deformação plástica do modelo se presta muito bem para isso:



Uma dica importante, e fonte muito frequente de enganos, é que se deve observar detalhadamente as unidades utilizadas no modelo para as propriedades físicas inseridas e nas saídas gráficas geradas.

Maior Nível Crítico na Utilização de Programas de Modelagem

Um bom conhecimento da Mecânica do Contínuo é um pré-requisito para bem se enveredar pela modelagem, analítica ou numérica. Dominar o que é pedido na entrada de dados, manusear as condições do problema e analisar criticamente os resultados são etapas fundamentais nas quais de uma forma ou de outra os conceitos e formulação oriundos da

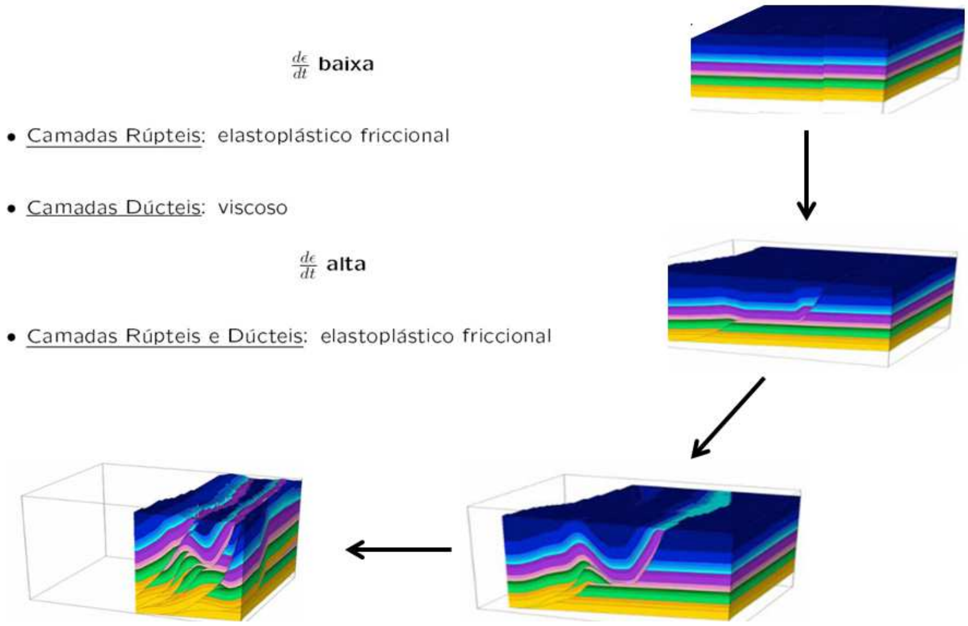
Mecânica do Contínuo se fazem presente. O processo de adquirir confiança e sensibilidade no uso de programas computacionais de modelagem em Geologia Estrutural disponíveis fica muito melhor pavimentado quando se tem uma orientação teórica consistente. Tal situação faz-se ainda mais premente quando se utiliza os denominados programas “caixa-preta”, aqueles que não apresentam de forma objetiva as formulações de que se valem. Deve-se ressaltar que, acintosamente ou não, poucos são os programas de modelagem comerciais que detalham as formulações utilizadas. Em resumo, é sempre importante ter em mente que o propósito de uma modelagem é auxiliar na interpetação tectônica e não gerar “figuras coloridas” por elas mesmo.

Escolha Adequada dos Comportamentos Reológicos Utilizados em Modelos Numéricos

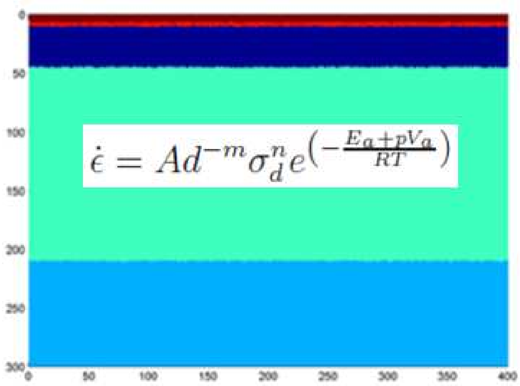
As relações constitutivas inseridas em modelos numéricos em tectônica objetivam simular o comportamento reológico das rochas no espaço e no tempo geológicos. Essas relações são equações que, resolvidas juntamente com as equações da continuidade, do equilíbrio e de estado, encerram as relações entre os campos dinâmicos e cinemáticos e as propriedades físicas P do sistema:

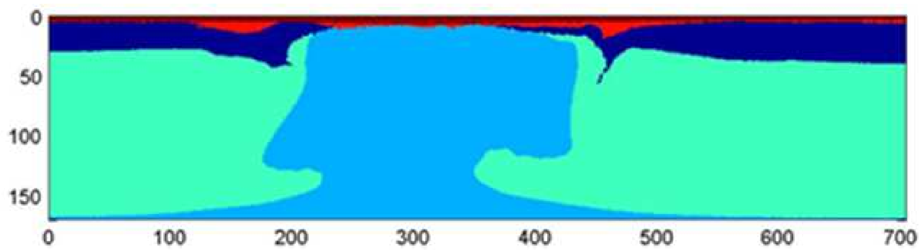
$$R(\sigma, \epsilon, \dot{\epsilon}, ..., P) = 0$$

Deve-se lembrar que os comportamentos elástico e elastoplástico são independentes do tempo (i.e. há relações entre tensões e deformações) e o comportamento viscoso é dependente do tempo (i.e. há relações entre tensões e taxas de deformação). Dessa forma, a depender do problema a ser endereçado, em escala de crosta e bacias sedimentares por taxas de deformação baixas as rochas rúpteis podem se valer da reologia elastoplástica e as dúcteis podem ser modeladas pela reologia viscosa. Nessa escala mas por taxas de deformação altas uma reologia elastoplástica pode ser aceita para todo pacote satisfatoriamente:



Em escala de litosfera, no mínimo para parte do manto litosférico e para a astenosfera, as rochas devem responder a um comportamento viscoso, sendo geralmente não-linear:

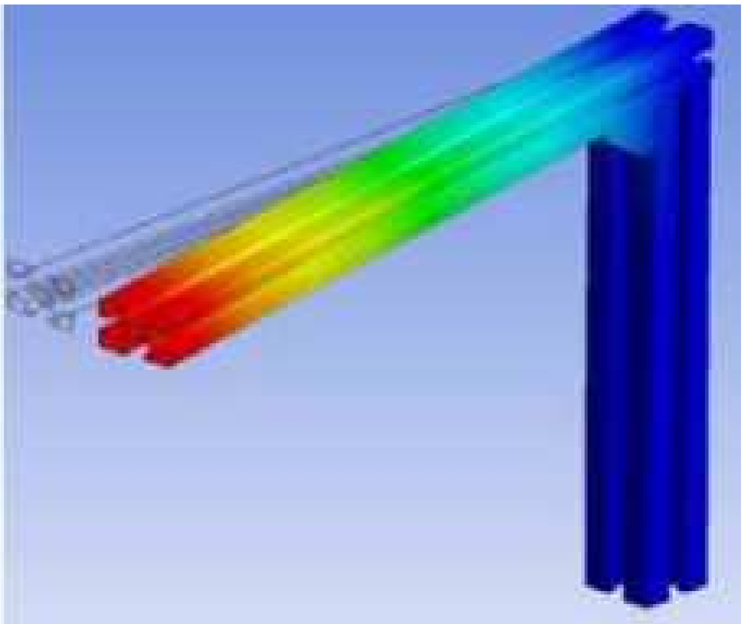




Evidentemente, como seria de esperar, o bom conhecimento da Mecânica do Contínuo facilitaria em muito a escolha dos diversos comportamentos mecânicos das rochas em seus amplos contextos tectônicos, em especial quando há comportamentos mistos.

Uso Recorrente Somente de Reologia Elástica em Modelos Numéricos

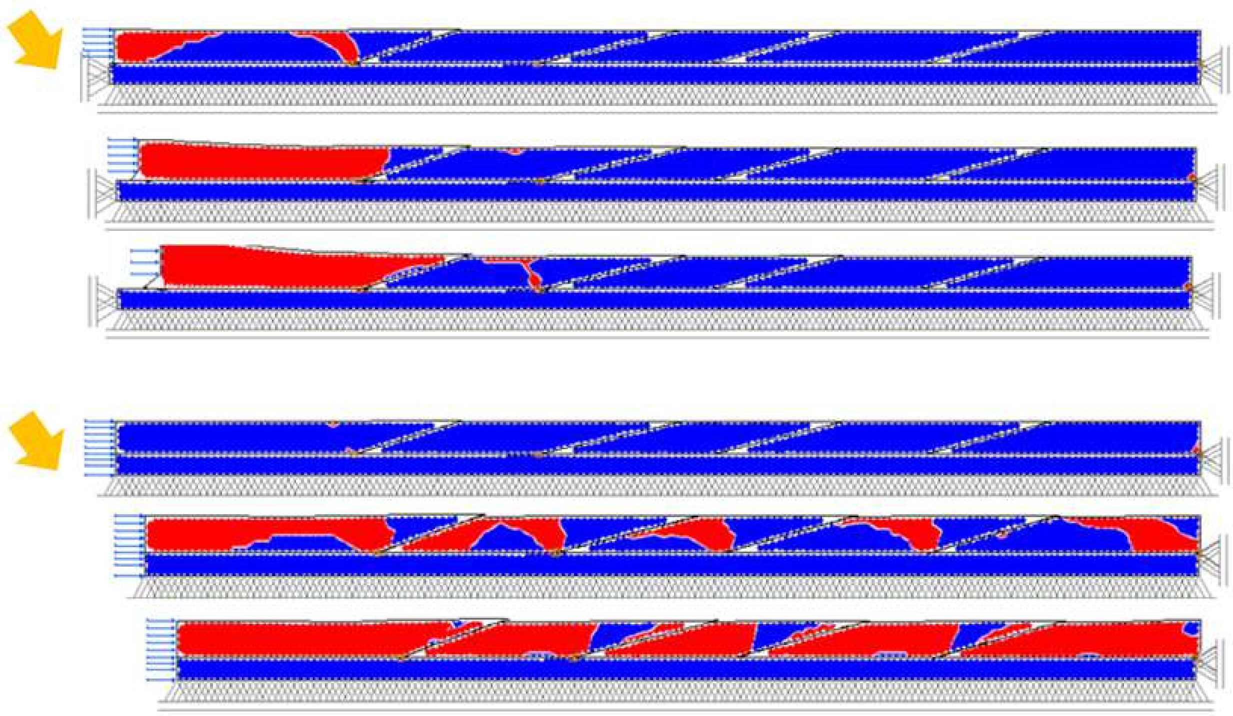
Muitos modelos numéricos em tectônica na literatura valem-se tão somente da reologia elástica em suas concepções. Pode-se dizer que o uso da reologia elástica é plenamente justificável em problemas de engenharia, quando geralmente se quer saber o comportamento do material estudado antes de romper:



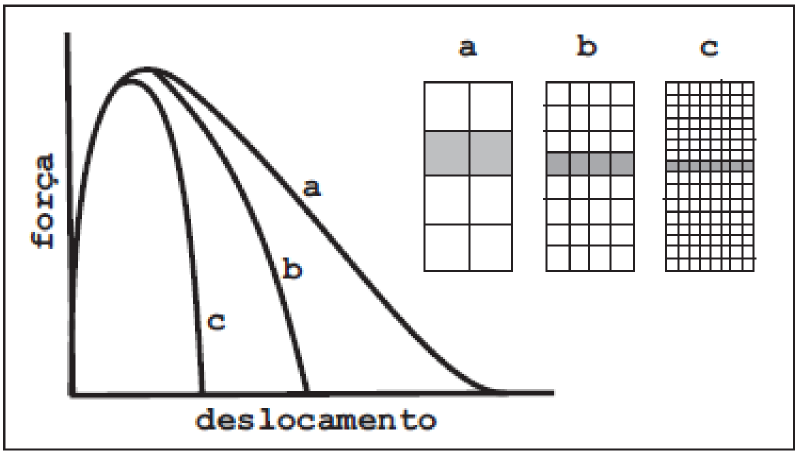
Historicamente, essa prática em tectônica se justificava no passado em função do comportamento elástico ser muito mais fácil de tratar em função de abarcar pequenas deformações, de ostentar uma relação linear entre tensão e deformação, de ser o único disponível em programas computacionais da engenharia e de necessitar de uma estrutura computacional menor. O comportamento elástico em rochas só se justifica quando se trabalha com taxas de deformação muito altas e se quer tão somente ter uma ideia inicial rudimenar da resposta do meio a carregamentos, e isto antes do falhamento. Deve-se ter em mente que, como regra, os materiais geológicos alcançam grandes deformações, plastificam e mostram relações não-lineares entre tensões e deformações. Embora o uso de apenas a reologia elástica em modelos numéricos aplicados aos ambientes geológicos esteja paulatinamente diminuindo na literatura, ainda hoje com certa frequência são vistos trabalhos que impõem apenas esse comportamento para as rochas. É de se pensar que com a ampla disponibilidade de programas e parafernálias computacionais expressivos hoje em dia tal procedimento é injustificável.

Ampliação do Entendimento na Colocação de Condições de Contorno e Iniciais em Modelos Numéricos

Ponto fundamental na utilização de métodos matemáticos em Geologia Estrutural, principalmente nos métodos numéricos, é que a resolução de sistemas de equações diferenciais necessita que sejam introduzidas condições de contorno e condições iniciais (se modelos no tempo), isto é, valores previamente prescritos ou conhecidos para algumas variáveis ou suas derivadas relacionadas ao comportamento físico do meio a ser modelado. De fato, as equações diferenciais exibem soluções múltiplas e, assim, é mister serem prescritos valores para algumas grandezas físicas envolvidas na modelagem do meio para que o problema seja resolvido matematicamente e para que se tenha uma solução única para o problema. A imposição das condições de contorno e iniciais é fator crítico em qualquer análise matemática, especialmente no caso de modelos em tectônica, no sentido que os sistemas relativos aos ambientes geológicos são naturalmente complexos e carregam incertezas mesmo na sua própria concepção. Os resultados quando da utilização de quaisquer métodos numéricos são extremamente dependentes das condições de contorno utilizadas. Destaca-se que a restrição do movimento em determinadas porções dos blocos modelados impactam diretamente os resultados obtidos:



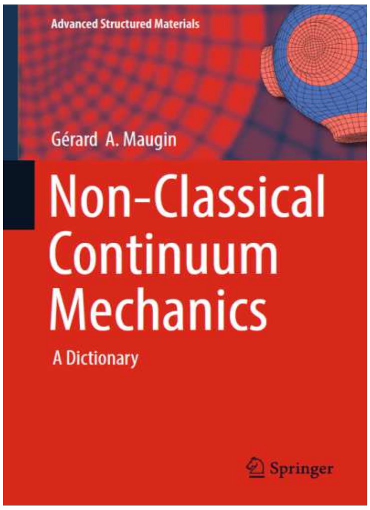
Nesses modelos, simulando um ambiente compressional carregado na porção esquerda e valendo-se do método dos elementos finitos, somente devido ao fato de se restringir ou não uma pequena porção dos modelos (setas), as porções plastificadas (vermelho) apresentam-se de forma muito distintas. Ainda, condições de contorno como a prescrição de cargas ou de deslocamentos ou de velocidades em determinadas bordas do modelo impactam diferentemente os resultados, como amplamente discutido em Lewis et al. (2007), e o modelador deve estar muito atento a isto. Outro ponto que merece atenção é que é imperativo evitar fazer interpetações e tirar conclusões analisando as bordas dos modelos numéricos, e isto não somente em função da imposição de condições de contorno mas de uma forma geral. Nesse caso, a estratégia seria ampliar o modelo, centralizando a área de interesse. Quando da análise da localização da deformação (i.e. falhamento) por métodos numéricos com malha, deve-se ficar atento que a espessura da zona de falha é completamene dependente do tamanho dos elementos da malha e, muitas vezes, das condições de contorno adotadas, como discutido em Lages (1997):



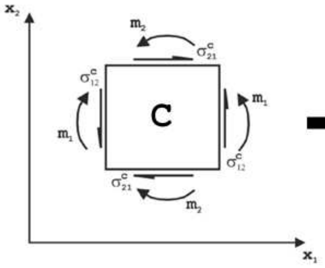
A despeito do quadro aparentemente desanimador no que tange a imposições de condições prévias, os modelos numéricos em tectônica podem elucidar muitos pontos de difícil avaliação tão somente através de modelos meramente conceituais. Considerando-se determinadas premissas e impondo-se determinadas condições de contorno e iniciais é possível se fazer algumas digressões acerca da evolução do quadro de deformação em ambientes geológicos. Nesse sentido, com pertinácia, é imperativo gerar e analisar diversos modelos com condições de contorno e iniciais aceitáveis e avaliar e comparar os resultados obtidos. Em síntese, como os modelos numéricos são modelos determinísticos, é necessário testar diversas possibilidades plausíveis para as condições de contorno e iniciais, os campos físicos e as propriedades físicas.

Ampliar a Concepção de Modelos Matemáticos ao Utilizar "Outras Mecânicas do Contínuo"

A Mecânica do Contínuo, leia-se clássica, é a considerada ao longo da exposição no presente texto. Entre outros aspectos, ela abarca: (i) o conceito de contínuo como unidade infinitesimal e representado matematicamente colapsado em um ponto, (ii) variação contínua de campos físicos e de propriedades e de suas derivadas e (iii) tensores de tensão e de deformação simétricos. Entretanto, no tratamento mecânico de materiais, há diversas "outras mecânicas do contínuo". O livro Maugin (2017) traz uma excelente síntese sobre as principais delas, incluindo os aspectos seminais de suas formulações:



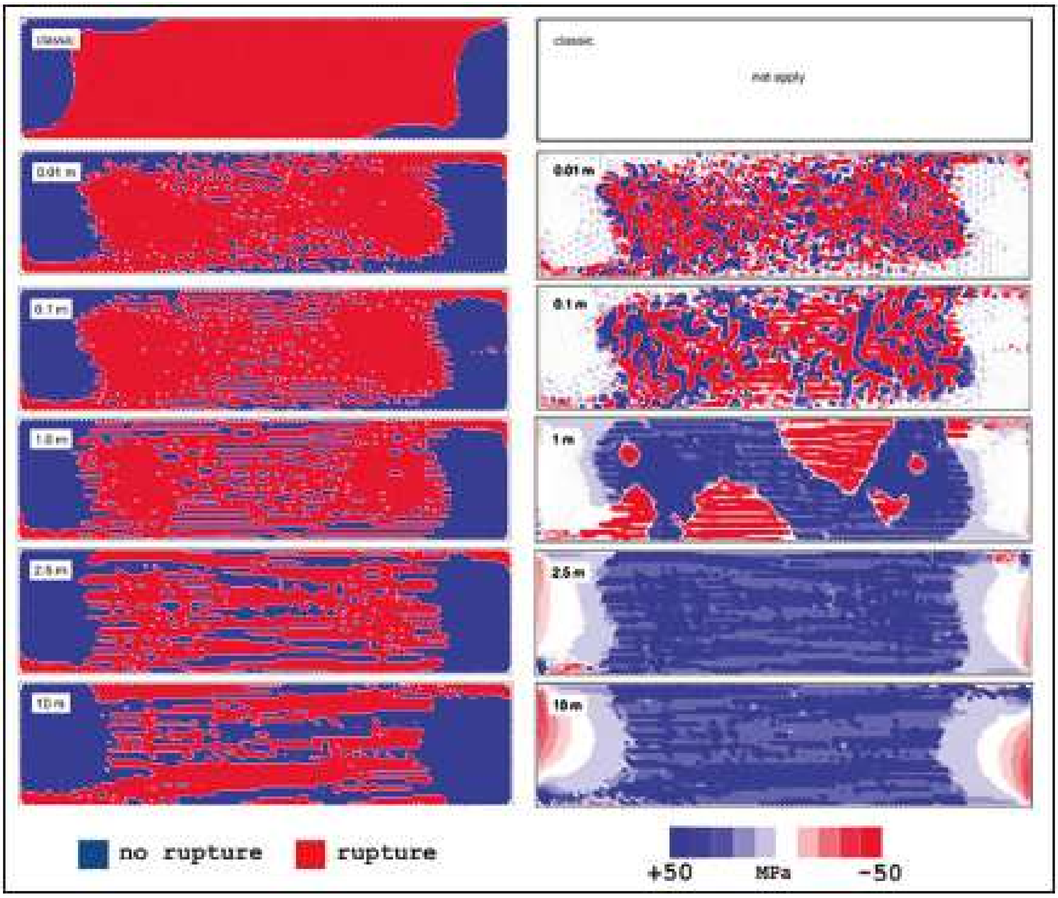
Basicamente, a necessidade de se valer de outras formulações mecânicas justifica-se devido a se almejar abordar a complexidade física de alguns materiais e a consequente ampliação da resposta mecânica dos sistemas por eles compostos quando solicitados mecanicamente. Em especial, a Mecânica do Contínuo de Cosserat incorpora uma geometria finita para o contínuo e, assim, trabalha com as tensões-momento oriundas da distribuição dos momentos angulares para o meio. A consequência imediata desta abordagem é que os tensores de tensão e de deformação se tornam assimétricos e as equações de equilíbrio devem levar em conta as tensões-momento. Em duas dimensões tem-se:



$$\sigma^{a} = \frac{(\sigma_{12} - \sigma_{21})}{2}$$

$$\partial_1 \sigma^c{}_{11} + \partial_2 \sigma^c{}_{21} + \rho X_1 = 0$$
$$\partial_1 \sigma^c{}_{12} + \partial_2 \sigma^c{}_{22} + \rho X_2 = 0$$
$$\partial_1 m_1 + \partial_2 m_2 + 2\sigma^a = 0$$

onde σ^a é a tensão cisalhante anti-simétrica, que mede o grau de assimetria do tensor de tensão de Cosserat e se relaciona às rotações no sistema, e m_i são as tensões-momento. Em meios geológicos, a presença de uma dimensão finita para o contínuo faz com que a estruturação interna de uma zona de falha, por exemplo, se apresente de forma mais realista em modelos numéricos pelo método dos elementos finitos:



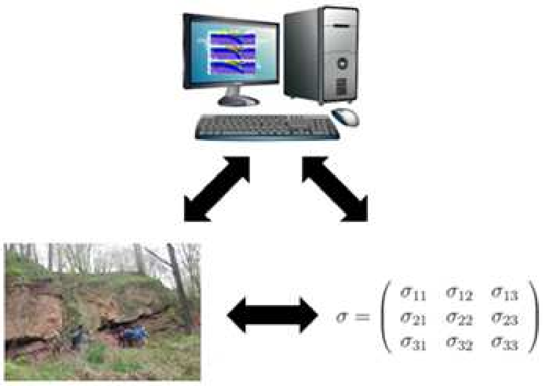
Cada modelo encerra 25 m de largura e 100 m de comprimento e foi imposto um binário cisalhante dextral ao longo das bordas inferior e superior. Comparando-se os resultados para a ruptura e as tensões cisalhantes anti-simétricas entre o contínuo clássico (superior) e o contínuo de Cosserat (inferiores, com comprimentos característicos de 0,01 a 10 m), vê-se que a incorporação de uma geometria finita nos últimos ostenta estruturações internas bem distintas. Ficam patentes a segmentação das porções em ruptura em bandas e a presença de porções com níveis e orientações distintos para as rotações internas. Preconiza-se que tal quadro encampa muito do se observa em zonas de falhas: fluxo material em bandas localizadas e estruturas internas rotacionais com ambos sentidos de movimento. Note que o contínuo clássico não reproduz esta complexidade estrutural. Detalhes sobre a Mecânica do Contínuo de Cosserat e sua relevância em Geologia Estrutural podem ser vistos em Moraes (2016).

Desenvolvimento de Códigos Computacionais Próprios

O domínio de uma linguagem computacional permite que melhor se compreenda as bases da Mecânica do Contínuo e que elas sejam aplicadas na busca de melhores interpretações em Geologia Estrutural. Há diversas linguagens e bibliotecas matemáticas (e.g. Matlab, Python) que possibilitariam isso de forma relativamente simples. Em um nível mais elementar e corriqueiro, a própria percepção de que de fato se compreende os conceitos acerca da Mecânica do Contínuo pode ser obtida pela implementação computacional. No dizer de Donald Knuth: “We often fail to realize how little we know about a thing until we attempt to simulate it on a computer”. De uma forma mais ampla, é deveras recompensador testar ideias sobre o comportamento mecânico dos materiais geológicos e o funcionamento de um paradigma tectônico através da implementação de procedimentos computacionais próprios baseados na Mecânica do Contínuo. Mais interessante ainda, com esses objetivos em mente, é a possibilidade de se modificar códigos preexistentes para a modelagem numérica em tectônica disponíveis (e.g. I2ELVIS, ASPECT, Mandyoc). Assim, códigos já disponíveis poderiam ser reestruturados e adaptados a problemas tectônicos particulares. Em especial, em Gerya (2019) há uma quantidade enorme de códigos abertos, incluindo o I2ELVIS, para simular processos tectônicos e geodinâmicos os mais variados. Em resumo, a programação computacional amplia em muito a possibilidade de se compreender as bases da Mecânica do Contínuo e de se testar hipóteses relativas aos processos de deformação geológica do planeta, hipóteses estas das mais simples às mais complexas e em diversas escalas.

Considerações Finais

A Mecânica do Contínuo alicerça as interpretações em Geologia Estrutural. O trinômio Mecânica do Contínuo, integração de dados obtidos em todas as escalas e quantificação nos estudos da evolução estrutural dos ambientes geológicos é desejável para se obter melhores interpretações tectônicas:



Especialmente, a modelagem numérica em tectônica está cada vez mais presente, não somente como área acessória, mas mesmo como tópico fundamental para o entendimento dos seus processos no espaço e no tempo geológicos. A profusão de condições físicas e parâmetros envoltos na evolução tectônica do planeta, e isto de forma acoplada, clama por uma maior quantificação de seus processos com o intuito de balizar mesmo os aspectos descritivos e qualitativos intrínsecos na análise dos ambientes geológicos. Pode-se livremente preconizar que: “Quantificar em geologia é qualificar com números”, frase sistematicamente repetida pelo presente autor. Por fim, deve-se registrar que a necessidade de um maior conhecimento da Mecânica do Contínuo como base da Geologia Estrutural fatalmente nos acende um alerta: cuidado com os conceitos e, em especial, as formulações apresentadas em trabalhos na literatura (mesmos os de “grandes nomes” e/ou os que passaram pela revisão de “grandes nomes”).

Referências

Fossen, H. 2019. Writing papers with an emphasis on structural geology and tectonics: advices and warnings. Brazilian Journal of Geology, .doi: 10.1590/2317-4889201920190109.

Gerya, T.V. 2019. Introduction to numerical geodynamic modelling. Cambridge University Press , Cambridge.

Lages, E.N. 1997. Modelagem da localização de deformações com teorias de contínuo generalizado. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro.

Lewis, A.; Hall, S.A.; Guest, J.; Couples, G.D. 2007. Kinematically-equivalent but geomechanically-different simulations of fault evolution: the role of loading configurations. In Jolley, S.J.; Barr, D.; Walsh, J.J.; Knipe, R.J., editores, Structurally complex reservoirs, volume 292 de Geological Society Special Publication, páginas 159-172. The Geological Society of London, Londres.

Maugin, G.A. 2017. Non-classical continuum mechanics. Springer, Singapura.

Means, W.D. 1976. Stress and strain. Basic concepts of continuum mechanics for geologists. Springer, Nova Iorque.

Means, W.D. 1990. Kinematics, stress, deformation and material behavior. Journal of Structural Geology, 12(8): 953-971.

Moraes, A. 2016. Mecânica do contínuo para a geologia estrutural. PerSe, São Paulo.

Pfiffner, O.A. e Ramsay, J.G. 1982. Constraints on geological strain rates: arguments from finite strain states of naturally deformed rocks. Journal of Geophysical Research, 87(B1): 311-321.

Pollard, D.D. e Fletcher, R. 2005. Fundamentals of structural geology. Cambridge University Press , Cambridge.

Pollard, D.D. e Martel, S.J. 2020. Structural geology. A quantitative introduction. Cambridge University Press , Cambridge.

Ramsay, J.G. e Lisle, R.J. 2000. The techniques of modern structural geology. Volume 3: applications of continuum mechanics in structural geology. Academic Press, Londres.

Reddy, J.N. 2013. An introduction to continuum mechanics. Cambridge University Press, Nova Iorque.