

Objetividade de Tensores

Anderson Moraes

A descrição dos fenômenos físicos requer invariância da formulação em relação ao sistema coordenado e ao sistema de referência ou, simplesmente, referencial, este se confundindo com o próprio observador. A invariância dos tensores relativa ao sistema coordenado adotado é garantida, como discutido anteriormente, em função da própria natureza da teoria acerca dos tensores. Por sua vez, a invariância em relação aos referenciais adotados é imperativa para que observadores que se movam arbitrariamente entre si avaliem as transformações físicas do meio da mesma forma. Nesse sentido, define-se a objetividade de tensores como a invariância deles relativamente às mudanças de referencial, isto é, às mudanças de observador.

Na mecânica do contínuo um observador pode ser alegoricamente definido como um corpo rígido com um relógio. Como corolário, a mudança entre dois referenciais pode ser analisada tão somente em termos de rotações rígidas e translações ao longo do tempo. Em notação matricial, considerando-se x um ponto no referencial original e t o tempo no referencial original e x' o mesmo ponto no referencial atual e t' o tempo no referencial atual, a mudança do referencial original para o referencial atual é dada por:

$$x' = Q(t)x + \tau(t) \quad (1)$$

onde $Q(t)$ é o tensor de rotação relativa dos referenciais, que rotaciona o referencial original em relação ao referencial atual ao longo do tempo, e $\tau(t)$ é o vetor de translação relativa dos referenciais, que translada a origem do referencial original em relação à origem do referencial atual ao longo do tempo. Note que ambos o tensor de rotação relativa dos referenciais e o vetor de translação relativa dos referenciais são descritos em função do tempo. O tensor de rotação relativa dos referenciais, haja vista que apenas impõe rotação rígida entre os referenciais, encerra a propriedade da ortogonalidade, ou seja:

$$Q^{-1} = Q^T \quad (2)$$

Adicionalmente, os eventos que ocorrem em cada referencial devem ter o mesmo intervalo de tempo entre eles, de modo que:

$$t' = t + \theta \quad (3)$$

onde θ é uma constante, de forma que um evento em um referencial é o mesmo evento no outro. A expressão 1 denota tão somente o mesmo ponto

material visto em dois referenciais (*i.e.* observadores) distintos, onde o par (x, t) em um referencial é transformado para o par (x', t') no outro referencial. Deve-se notar que mudança de referencial evidentemente difere de mudança de sistema coordenado, haja vista que cada referencial pode ser expresso por qualquer sistema coordenado e, internamente ao referencial, o sistema coordenado pode ser alterado em acordo com o interesse.

A objetividade garante que as magnitudes, as direções e os eventos são independentes do referencial adotado nas formulações dos fenômenos físicos, com a expressão 1 sendo sempre respeitada e, em consequência, há invariância dos campos físicos dados por tensores de qualquer ordem que sejam inseridos nas formulações pertinentes. Os tensores podem ser definidos como tensor objetivo ou tensor não-objetivo caso, na ordem, sigam ou não a objetividade de tensores. Um escalar ϕ , portanto um tensor de ordem zero, expresso no referencial original $\phi(x, t)$ e no referencial atual $\phi'(x', t')$, é um tensor objetivo, pois é obviamente invariante a translações, a rotações rígidas e às suas variações temporais em qualquer referencial. Assim:

$$\phi'(x', t') = \phi(x, t) \quad (4)$$

Um vetor u , portanto um tensor de ordem um, posicionado no referencial original $u(x, t)$ e no referencial atual $u'(x', t')$, é um tensor objetivo quando se tem:

$$u'(x', t') = Q(t)u(x, t) \quad (5)$$

De fato, tomando dois pontos P e Q no referencial original e no referencial atual, na ordem, um vetor é dado por:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x^P - x^Q \\ u'(x', t') &= x'^P - x'^Q \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo-se 1 na segunda expressão de 6 tem-se que:

$$\begin{aligned} u'(x', t') &= Q(t)x^P + \tau(t) - (Q(t)x^Q + \tau(t)) \Rightarrow \\ u'(x', t') &= Q(t)(x^P - x^Q) \end{aligned} \quad (7)$$

Assim, tomando-se a primeira expressão de 6 e inserindo-a em 7, chega-se a 5. Um tensor T de ordem dois, descrito no referencial original $T(x, t)$ e no referencial atual $T'(x', t')$, é um tensor objetivo caso siga a expressão:

$$T'(x', t') = Q(t)T(x, t)Q(t)^T \quad (8)$$

Realmente, considerando-se o referencial original e o referencial atual, um tensor de ordem dois pode ser relacionado a dois vetores, respectivamente, a e b e a' e b' na forma:

$$\begin{aligned} a &= T(x, t)b \\ a' &= T'(x', t')b' \end{aligned} \quad (9)$$

Com 5, a segunda expressão de 9 fica:

$$Q(t)a = T'(x', t')Q(t)b \quad (10)$$

Inserindo-se a primeira expressão de 9 na expressão anterior e valendo-se de 2 tem-se:

$$\begin{aligned} Q(t)T(x, t)b &= T'(x', t')Q(t)b \Rightarrow \\ Q(t)T(x, t) &= T'(x', t')Q(t) \Rightarrow \\ Q(t)T(x, t)Q(t)^T &= T'(x', t')Q(t)Q(t)^T \Rightarrow \\ T'(x', t') &= Q(t)T(x, t)Q(t)^T \end{aligned} \quad (11)$$

que é a expressão 8. Observe que os tensores em 4, 5 e 8 são expressos em função do espaço e do tempo. Dessa forma, os tensores de tensão, de deformação infinitesimal e de taxa de deformação tratam-se de tensores objetivos.

É fundamental notar que os vetores posição x , velocidade v e aceleração α de um ponto são não-objetivos, o primeiro sendo dado pela expressão 1 e os outros dois pela derivada primeira e segunda desta expressão no tempo, na ordem:

$$\begin{aligned} x' &= Q(t)x + \tau(t) \\ \dot{x}' &= \dot{Q}(t)x + Q(t)\dot{x} + \dot{\tau}(t) \Rightarrow \\ v' &= \dot{Q}(t)x + Q(t)v + \dot{\tau}(t) \\ \ddot{x}' &= \ddot{Q}(t)x + \dot{Q}(t)\dot{x} + \dot{Q}(t)\dot{x} + Q(t)\ddot{x} + \ddot{\tau}(t) \Rightarrow \\ \alpha' &= \ddot{Q}(t)x + 2\dot{Q}(t)v + Q(t)\alpha + \ddot{\tau}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Ou seja, tais vetores não seguem a expressão 5, requisito para um vetor ser objetivo. Evidentemente, a não-objetividade desses vetores, ou seja, a dependência do referencial, é consonante com o que preconiza a mecânica clássica. Por sua vez, o vetor posição relativa de dois pontos, como mostrado no desenvolvimento que leva a 5, expressões 6 e 7, trata-se de um vetor objetivo, e analogamente, também o são o vetor velocidade relativa e o vetor aceleração relativa.

Há relações deveras significativas entre a objetividade e a segunda lei do movimento. A objetividade preconiza a invariância dos tensores em relação às mudanças de referencial, ou seja, às mudanças de observador. A segunda lei do movimento, que encerra a proporcionalidade entre o vetor força e o

vetor aceleração, é definida em relação a referenciais inerciais, ou seja, não-acelerados. Dessa forma, como mostra a terceira equação de 12, em sua forma mais ampla, o vetor aceleração é não-objetivo:

$$\alpha' = \ddot{Q}(t)x + 2\dot{Q}(t)v + Q(t)\alpha + \ddot{\tau}(t) \quad (13)$$

Como decorrência, a força *a priori* é também um vetor não-objetivo. Contudo, quando a aceleração angular $\ddot{Q}(t)$, a velocidade angular $\dot{Q}(t)$ e a aceleração da translação $\ddot{\tau}(t)$ são nulas, condição para se ter um referencial inercial, a expressão anterior colapsa para:

$$\alpha' = Q(t)\alpha \quad (14)$$

Em outras palavras, em acordo com 5, a aceleração se torna um vetor objetivo quando se tem referenciais inerciais e, assim, a força também se torna um vetor objetivo. Como corolário, vê-se a necessidade de se trabalhar com referenciais inerciais na mecânica clássica e, conseqüentemente, na mecânica do contínuo.

O tensor gradiente de deformação, rigorosamente, não é um tensor objetivo. Em notação matricial, tomando-se na expressão 1 a derivada de um ponto escrito nos referenciais original e atual em relação às coordenadas iniciais X chega-se a:

$$\frac{\partial x'}{\partial X} = Q(t) \frac{\partial x}{\partial X} \quad (15)$$

Assim, escreve-se para o tensor gradiente de deformação:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \text{ e } F' = \frac{\partial x'}{\partial X} \quad (16)$$

Dessa forma, 15 fica tão somente:

$$F' = Q(t)F \quad (17)$$

Em palavras, a mudança do referencial original para o referencial atual para o tensor gradiente de deformação não segue a requerida expressão 8, para quando são considerados tensores de segunda ordem objetivos, e sim a expressão 5, que se refere à mudança de referencial relacionada a vetores. Assim, o tensor gradiente de deformação é um caso do denominado tensor de dois pontos, que é um tensor de segunda ordem que muda de referencial como se fosse um vetor e simplesmente conecta pontos em diferentes configurações. Como corolário, por não ser um tensor objetivo, o tensor gradiente de deformação não pode ser isoladamente disposto em relações constitutivas.