

# *Localização da Deformação e Métodos Numéricos com Malha*

Anderson Moraes

A simulação da localização da deformação através de métodos numéricos que se valem da discretização do meio por elementos compondo uma malha leva ao iconicamente problema patológico de dependência do tamanho dos elementos da malha na caracterização da geometria da banda de deformação localizada nos modelos. Basicamente, a exemplo, a espessura da banda e sua orientação em relação à tensão principal máxima dependem do tamanho dos elementos da malha. O que subjaz à questão da dependência da malha no processo de localização da deformação em métodos numéricos é que, de forma imediata, as equações diferenciais envoltas na solução do problema quando se atinge a condição para a bifurcação e para a localização da deformação tornam-se equações não-elípticas, o que leva a se ter um problema mal-condicionado em termos de condições iniciais ou condições de valor de contorno.

De um modo genérico, o referido problema quando se instaura a instabilidade em um meio contínuo pode ser entendido pelo desenvolvimento que se segue. A Figura 1 representa a progressão da localização de uma banda de cisalhamento por cisalhamento simples. Considerando-se estados planos de tensão e de deformação ao longo de  $x_3$ , somente a presença de tensões cisalhantes em  $x_1x_2$  e que  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$  e  $u_2 = 0$ , a relação constitutiva pode ser dada tão somente por:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = k\epsilon_{12} \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} = \left(\frac{k}{2}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (1)$$

onde o escalar  $k$  encerra as propriedades mecânicas do material. Desprezando-se as forças volumétricas, substituindo-a na equação do movimento:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2)$$

tem-se apenas que:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \left(\frac{2\rho}{k}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (3)$$

Na porção fora da banda de cisalhamento, o gradiente  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  é constante ao longo da progressão da deformação. Assim:

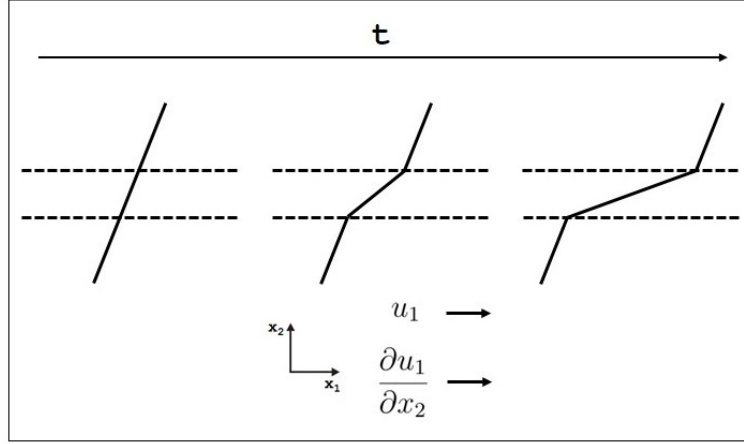


Figura 1: Progressão da localização de uma banda de cisalhamento por cisalhamento simples.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = c \Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad (4)$$

onde  $c$  é uma constante. Dessa forma, tem-se o tradicional problema em equilíbrio para todo o meio fora da banda de cisalhamento, dado por uma equação elíptica:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad (5)$$

Por sua vez, dentro da banda o gradiente  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  varia ao longo da progressão da deformação. Em decorrência:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = f(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial f(t)}{\partial t} \neq 0 \quad (6)$$

onde  $f(t)$  é uma função do tempo. Como corolário, tem-se agora um problema transiente dentro da banda de cisalhamento, dado por uma equação hiperbólica:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \left(\frac{2\rho}{k}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (7)$$

Portanto, frente às condições iniciais ou condições de contorno impostas para se realizar modelos numéricos tradicionalmente governados por equações elípticas, a estabilidade do sistema como um todo é perdida quando há localização da deformação, o que leva a soluções ditas patológicas, isto é, soluções

que não compartilham a estrutura normalmente esperada que concerne historicamente ao problema original. Ou seja: condições impostas para se resolver problemas governados por equações elípticas não são adequadas para se resolver de forma única, ainda que localmente, equações hiperbólicas, levando rigorosamente a várias soluções possíveis. Considerando-se especificamente a equação 7, a depender do termo relativo à taxa em seu segundo membro, uma gama de soluções podem ser obtidas e não necessariamente elas respeitam as condições iniciais ou condições de contorno impostas ao problema. É importante salientar que ao se valer do comportamento elastoplástico na análise da localização da deformação, o que é feito na maior parte da literatura, os diferenciais dos campos físicos considerados relativos ao tempo acima dispostos devem ser tomados tão somente como incrementos ao longo do processo, pois o comportamento elastoplástico independe do tempo. Em termos gerais, como exposto Sabet e De Borst (2019), modelos numéricos que tratam a localização da deformação em materiais com *softening* ou não-associados conduzem naturalmente à perda de elipsidade das equações governantes do meio.

A dependência do tamanho dos elementos da malha quando ocorre a perda de elipsidade das equações do problema pode ser ligeiramente evidenciada por um simples exercício, na linha do exposto em Liu (2018). Considera-se uma barra com comportamento elastoplástico com *softening* fixa em uma extremidade e solicitada no topo da outra extremidade por um deslocamento tangencial  $u$ , que gera tensão e deformação cisalhantes ao longo da barra. Sendo a barra com comprimento  $L$  discretizada em  $m$  elementos com comprimento  $l$  cada um tem-se:

$$L = ml \quad (8)$$

Supondo-se que um elemento da barra encerre uma resistência  $\sigma_Y$  menor que os demais  $m - 1$  elementos, até ocorrer a plastificação desse elemento tem-se o comportamento elástico, com a deformação cisalhante elástica  $\epsilon_C^e$  sendo dada em função da tensão cisalhante  $\sigma_C$ , por:

$$\epsilon_C^e = \frac{\sigma_C}{2G} \quad (9)$$

Atingindo-se a plastificação por comportamento elastoplástico com *softening* do elemento menos resistente, a deformação cisalhante plástica  $\epsilon_C^p$  desse elemento fica:

$$\epsilon_C^p = \frac{\sigma_Y - \sigma_C}{h} \quad (10)$$

onde  $h$  é o módulo de *hardening*, que encerra valor negativo para *softening*. Deve-se observar que com o elemento menos resistente plastificando, todo o modelo encerra integralmente *softening* e, no processo de descarregamento devido ao comportamento elastoplástico com *softening* do sistema como um todo, o modelo é incrementalmente descarregado elasticamente. Assim, o deslocamento da barra pode ser particionado por:

$$u = ml\epsilon_C^e + l\epsilon_C^p \quad (11)$$

Dessa forma, de 8 e da expressão anterior, a deformação cisalhante média  $\bar{\epsilon}_C$  da barra fica:

$$\bar{\epsilon}_C = \frac{u}{L} = \frac{ml\epsilon_C^e + l\epsilon_C^p}{ml} = \epsilon_C^e + \frac{\epsilon_C^p}{m} \quad (12)$$

Substituindo-se as expressões 9 e 10 em 12, chega-se finalmente a:

$$\bar{\epsilon}_C = \frac{\sigma_C}{2G} + \frac{\sigma_Y - \sigma_C}{mh} \quad (13)$$

Em palavras, fica evidente que ao se atingir a plastificação emerge a dependência da discretização da malha no cálculo da deformação do sistema, em especial no que se refere à região com deformação localizada. Basicamente, quanto menor o número de elementos da malha, valores de  $m$  baixos (l alto), maior a espessura da porção com localização da deformação e, contrariamente, quanto maior o número de elementos da malha, valores de  $m$  altos (l pequeno), menos expressiva é a espessura da porção com localização da deformação. Adicionalmente, como mostra a teoria acerca do processo de homogeneização, o aumento excessivo da discretização do meio leva à deformação nula para os elementos plastificados, o que equivale a um comportamento elastoplástico paradoxalmente não-dissipativo e, portanto, não aceitável. Ainda, considerando-se o elemento que encerra plastificação, da equação 11, tem-se que seu deslocamento é dado por:

$$u = l(\epsilon_C^e + \epsilon_C^p) \quad (14)$$

Levando-se em conta o comportamento elastoplástico, que é independente do tempo, pode-se conceber que as taxas de variação do deslocamento e do gradiente relativo a ele equivalem a seus respectivos pequenos incrementos ao longo da modelagem. Dessa forma, inserindo-se 14 em 7 chega-se a:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left( \frac{kl}{2\rho} \right) \frac{\partial^2 (\epsilon_C^e + \epsilon_C^p)}{\partial x_2^2} \quad (15)$$

A expressão anterior evidencia que podem ser suscitadas diversas soluções dependentes do tamanho dos elementos da malha e dos campos de deformações no processo de instauração da instabilidade devido à localização da deformação no elemento que plastifica.

Supondo as condições utilizadas na derivação da equação 13, pode-se utilizá-la para estudar a dependência do tamanho dos elementos da malha no processo de localização da deformação quando se tem um material com comportamento elastoplástico com *softening* frente a um cisalhamento imposto em sua porção superior e com base fixa. A deformação cisalhante média do modelo é dada por:

$$\bar{\epsilon}_C = \bar{\epsilon}_C^e + \frac{\bar{\epsilon}_C^p}{m} = \frac{\sigma_C}{2G} + \frac{\sigma_Y - \sigma_C}{mh} \quad (16)$$

sendo  $\bar{\epsilon}_C^e = \frac{\sigma_C}{2G}$  e  $\bar{\epsilon}_C^p = \frac{\sigma_Y - \sigma_C}{mh}$  suas parcelas elástica e plástica, respectivamente. Foram utilizados  $G = 10$  GPa,  $h = -5$  GPa e  $\sigma_Y = 20$  MPa e número de elementos  $m$  de 1, 2, 5, 10, 50 e  $10^{100}$ , este último valor tipificando que, teoricamente,  $m \rightarrow \infty$ . Com a progressão da tensão cisalhamento, decorrente da imposição de um deslocamento no topo do modelo, após tão somente um elemento atingir o *yield strength* e plastificar, os elementos sofrem descarregamento elástico em função da instauração de *softening* no sistema como um todo devido ao elemento que plastifica. A Figura 2 mostra a evolução da deformação cisalhante média ao longo do carregamento para diferentes números de elementos. A porção elástica é indiferente ao números de elementos utilizados. Fica claro que a deformação cisalhante média alcançada é fortemente dependente do número de elementos e, por conseguinte, do tamanho dos elementos. Quando  $m = 1$  tem-se a situação em que todo o modelo representa a porção com localização da deformação, portanto a banda de cisalhamento tomara todo o modelo. Conforme  $m$  aumenta, e portanto a discretização do modelo aumenta, a localização da deformação se dá em um elemento com tamanho cada vez menor, de forma que cada vez mais a deformação cisalhante média do sistema diminui em função da deformação cisalhante plástica diminuir. O paroxismo se estabelece quando  $m \rightarrow \infty$  e a dimensão do elemento é insignificante e, assim, a deformação cisalhante média iguala-se à deformação cisalhante elástica. Ou seja: paradoxalmente, o sistema plastifica mas sua deformação plástica é nula, sugerindo que a análise da localização da deformação quando não se vale de métodos de regularização fica deveras prejudicada.

Numericamente, a dependência do tamanho dos elementos da malha no estabelecimento da espessura da porção com localização da deformação pode ser estudada com a utilização de algum programa computacional disponível. Utilizou-se o método das diferenças finitas, ao se adaptar um procedimento

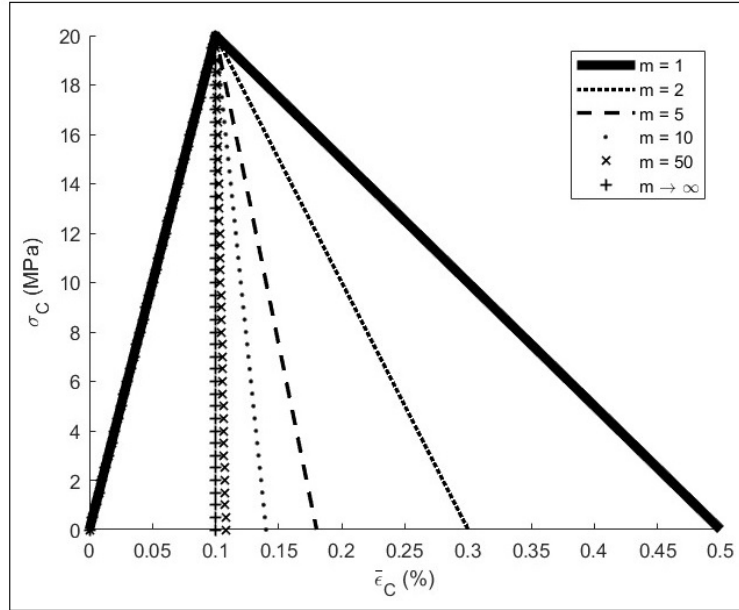


Figura 2: Evolução da deformação cisalhante média ao longo do carregamento para diferentes números de elementos.

computacional em cima de um dos diversos códigos apresentados em Gerya (2019). Nos modelos não há movimentação vertical e, para simular um cisalhamento dextral, foram prescritos deslocamentos horizontais progressivos contrários no topo e na base e nulos no meio. Os modelos ostentam o comportamento elastoplástico com *softening*, de forma que ao as tensões cisalhantes nos elementos atingirem o *yield strength* ocorre a plastificação deles e a contínua diminuição das tensões cisalhantes, estas determinadas pelo módulo de *hardening*. O número de elementos nas malhas em cada um dos modelos simulados foi de 5, 14, 27, 152, 377, 702, 1.652, 3.002, 4.752, 12.402, 19.502 e 44.252. Evidentemente, com o aumento do número de elementos nas malhas há uma diminuição do tamanho dos elementos. A Figura 3 grafica os resultados obtidos, mostrando a zona plastificada (cinza) para cada modelo com diferentes tamanhos dos elementos. Fica clara a dependência do tamanho dos elementos da malha na determinação da espessura e da área da porção com localização da deformação. Nesse caso analisado, apenas quando se vale de um número de elementos de algumas dezenas de milhares tais aspectos geométricos ficam mais sutis. Dessa forma, deve-se tomar muito cuidado ao se estudar os aspectos geométricos das zonas com deformação localizada quando são utilizados métodos numéricos com malha.

A mitigação do problema de dependência da discretização da malha na

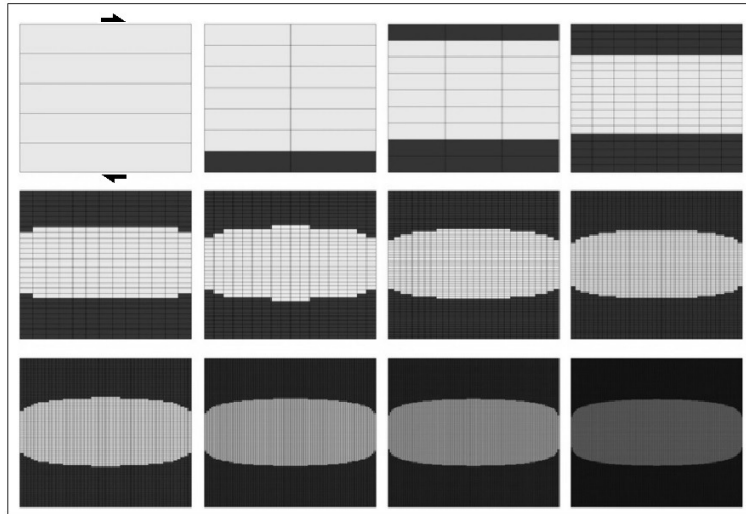


Figura 3: Plastificação em modelos numéricos com malhas com diferentes tamanhos dos elementos condicionando a espessura da porção com localização da deformação.

modelagem numérica da localização da deformação é conduzida através da denominada regularização, que se trata de uma técnica que objetiva reduzir tal dependência. Isso é feito ao se introduzir parâmetros de comprimento relativos ao material nas formulações utilizadas na modelagem do processo de localização. Em Liu et al. (2022) são apresentadas e comparadas as principais técnicas de regularização, em especial no que se refere a materiais geológicos. Os autores destacam os métodos de regularização pela viscosidade, que utiliza a mecânica do contínuo clássico, pela teoria não-local, pela teoria dos gradientes de ordem mais alta e pela mecânica de Cosserat, os últimos na égide da mecânica do contínuo generalizado. Contudo, deve-se ter em mente que a introdução de pelo menos um parâmetro de comprimento relacionado ao material prescinde de um significado físico objetivo e, entre as diversas técnicas de regularização, não há correlação explícita entre os parâmetros de comprimento utilizados em cada método. Pelo fato da mecânica dos meios contínuos de Cosserat incorporar um comprimento característico diretamente no estabelecimento de relações constitutivas e de critérios de fluxo, diversos autores mostram que ela é deveras adequada para diminuir e mesmo coibir a dependência do tamanho dos elementos da malha na simulação da localização da deformação por métodos numéricos com malha.

Através de uma formulação imediata, pode-se estudar analiticamente a relação entre a localização da deformação e o comprimento característico em um contexto de um cisalhamento imposto a um modelo com comporta-

mento elastoplástico com *softening* pela mecânica de Cosserat. Detalhes da formulação da mecânica dos meios contínuos de Cosserat podem ser vistos em Moraes (2016). Supõe-se um modelo infinito na horizontal (eixo  $x_1$ ) e com largura  $W$  na vertical (eixo  $x_2$ ), passível de movimentação apenas na horizontal. Ainda, impõe-se que o modelo é solicitado tão somente por um incremento de tensão cisalhante  $d\sigma_C$  no topo, que varia em média ao longo da largura por  $\bar{d}\sigma_C$ . Nessas condições, desprezando-se então as tensões normais de Cosserat e também as forças volumétricas, da segunda expressão da equação do equilíbrio do meio contínuo generalizado de Cosserat, pode-se aventar a seguinte proporcionalidade entre o incremento de tensão cisalhante anti-simétrica médio e o incremento de tensão cisalhante médio:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{21}^c}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{d\sigma_{21}}{W} + \frac{d\tau_{21}}{W} &= 0 \Rightarrow \\
\frac{d\sigma_{21}}{W} - \frac{d\sigma^a}{W} &= 0 \Rightarrow \\
\bar{d}\sigma^a \propto \bar{d}\sigma_{12} = \bar{d}\sigma_{21} = \bar{d}\sigma_C
\end{aligned} \tag{17}$$

Observe que  $\sigma_{21}^c = \sigma_{21} + \tau_{21}$  e  $\tau_{12} = -\tau_{21} = \sigma^a$ . Rigorosamente, há necessidade de resolver acopladamente toda a equação do equilíbrio do meio contínuo generalizado de Cosserat. Por facilidade de exposição, o que não altera a formulação analítica em sua essência, assume-se de forma imediata apenas que:

$$\bar{d}\sigma^a \approx \bar{d}\sigma_C \tag{18}$$

Nas condições do problema, a única tensão-momento presente é  $m_1$ . Em decorrência, da terceira expressão da equação do equilíbrio do meio contínuo generalizado de Cosserat e sendo  $l$  o comprimento característico, chega-se a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_1}{\partial x_1} + \sigma_{12}^c - \sigma_{21}^c &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\partial m_1}{\partial x_1} + \tau_{12}^c - \tau_{21}^c &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\bar{d}m_1}{l} + \bar{d}\sigma^a - (-\bar{d}\sigma^a) &= 0 \Rightarrow \\
\bar{d}m_1 &\approx -2\bar{d}\sigma^a l
\end{aligned} \tag{19}$$

Tomando-se da relação constitutiva para um meio contínuo elástico de Cosserat, a segunda expressão dela, tem-se:

$$m_1 = B\kappa_1^c \Rightarrow \bar{d}m_1 \approx B\bar{d}\kappa_1^c \tag{20}$$

O módulo de flexão é dado por:

$$B = 2Gl^2 \tag{21}$$



Adicionalmente, faz-se:

$$\kappa_1^c = \frac{\partial \omega_3^c}{\partial x_1} \Rightarrow \bar{d}\kappa_1^c \approx \frac{\bar{d}\omega_3^c}{l} \quad (22)$$

Combinando-se as quatro últimas expressões, vê-se que:

$$\bar{d}\omega_3^c \approx -\frac{\bar{d}\sigma_C}{G} \quad (23)$$

Como somente há movimentação na horizontal tem-se  $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$  tem-se:

$$\gamma_{21}^c = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3^c \Rightarrow \bar{d}\gamma_{[21]}^c \approx -\bar{d}\omega_3^c \Rightarrow \bar{d}\gamma_{[21]}^c \approx \frac{\bar{d}\sigma_C}{G} \quad (24)$$

Em decorrência, o incremento de tensão cisalhante elástica de Cosserat médio fica:

$$\sigma_C^{ce} = 2G\epsilon_{21} + 2G_r\gamma_{[21]}^c \Rightarrow \bar{d}\sigma_C^{ce} = \bar{d}\sigma_C + \frac{2G_r\bar{d}\sigma_C}{G} \quad (25)$$

E o incremento de deformação cisalhante elástica de Cosserat médio é dado por:

$$\bar{d}\epsilon_C^{ce} = \frac{\bar{d}\sigma_C}{2G} + \frac{\bar{d}\sigma_C}{G} \quad (26)$$

Na continuidade, quando se tem *softening*, faz-se:

$$\begin{aligned} d\sigma_C^{cp} &= h d\epsilon_C^{cp} \Rightarrow \\ \bar{d}\sigma_C^{cp} &= h \bar{d}\epsilon_C^{cp} \Rightarrow \\ \bar{d}\sigma_C^{cp} &= h d\lambda \end{aligned} \quad (27)$$

Foi concebido um critério de fluxo que combina um critério de fluxo para as tensões cisalhantes e um critério de fluxo para as tensões-momento. Dessa forma, escreve-se:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sigma_Y - \sigma_C \text{ e } f_2 = |m - 2\sigma^{al}| - \sigma_{0m} \Rightarrow \\ f &= \sigma_Y + \frac{|m - 2\sigma^{al}| - \sigma_{0m}}{W} - \sigma_C \end{aligned} \quad (28)$$

Com:

$$df = d\sigma_Y + \frac{|dm - 2d\sigma^{al}| - d\sigma_{0m}}{W} - d\sigma_C \Rightarrow \bar{d}f = \frac{4l\bar{d}\sigma_C}{W} - \bar{d}\sigma_C \quad (29)$$

tem-se que:

$$d\lambda = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma = \frac{1}{h} \bar{d}f \Rightarrow d\lambda = \left( \frac{1}{h} \right) \frac{4l\bar{d}\sigma_C}{W} - \bar{d}\sigma_C \quad (30)$$

Como corolário, o incremento de tensão cisalhante plástica de Cosserat médio é:

$$\bar{d}\sigma_C^{cp} = \frac{4l\bar{d}\sigma_C}{W} - \bar{d}\sigma_C \quad (31)$$

Por sua vez, o incremento de deformação cisalhante plástica de Cosserat médio fica na forma:

$$\bar{d}\epsilon_C^{cp} = \frac{4l\bar{d}\sigma_C}{Wh} - \frac{\bar{d}\sigma_C}{h} \quad (32)$$

Rearranjando as expressões para os incrementos de deformação cisalhante elástica de Cosserat médio e de deformação cisalhante plástica de Cosserat médio obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{d}\epsilon_C^{ce} &= \frac{3\bar{d}\sigma_C}{2G} \\ \bar{d}\epsilon_C^{cp} &= \left[ \frac{4l}{W} - 1 \right] \frac{\bar{d}\sigma_C}{h} \end{aligned} \quad (33)$$

Finalmente, de posse das expressões para  $\bar{d}\sigma_C^{ce}$ ,  $\bar{d}\sigma_C^{cp}$ ,  $\bar{d}\epsilon_C^{ce}$  e  $\bar{d}\epsilon_C^{cp}$ , pode-se simular a evolução das tensões cisalhantes e das deformações cisalhantes para um meio contínuo de Cosserat com comportamento elastoplástico com *softening* em função do comprimento característico. Valendo-se de  $G = 50$  GPa,  $G_r = 25$  GPa,  $h = -10$  GPa,  $\sigma_Y = 20$  MPa e  $\sigma_{0m} = 10$  MPa e considerando-se uma largura  $W = 1$  m e comprimentos característicos  $l$  de 0, 0,25, 0,5, 0,75 e 1 m, a Figura 4 mostra a evolução da deformação cisalhante de Cosserat média ao longo do carregamento para diferentes comprimentos característicos. De imediato, no modelo estabelecido, em consonância com a expressão para  $\bar{d}\epsilon_C^{ce}$ , de fato, vê-se que os incrementos de deformação cisalhante elástica de Cosserat médios se dão de forma indiferente em relação ao comprimento característico. Contudo, os valores de pico das deformações cisalhantes elásticas de Cosserat médias em si, quando o modelo plastifica, são fortemente dependentes do comprimento característico em cada caso. Quanto menor o comprimento característico, menor a tensão cisalhante de Cosserat necessária para o modelo plastificar. Concebendo-se que para  $l = 0$  m tem-se um contínuo clássico, fica claro que com  $l > 0$ , ou seja, com a mecânica de Cosserat operando, o material fica mais rígido para comprimentos característicos mais altos. Em termos de localização da deformação, como consequência, materiais com maiores comprimentos característicos necessitam de carregamentos mais expressivos para que se instaure

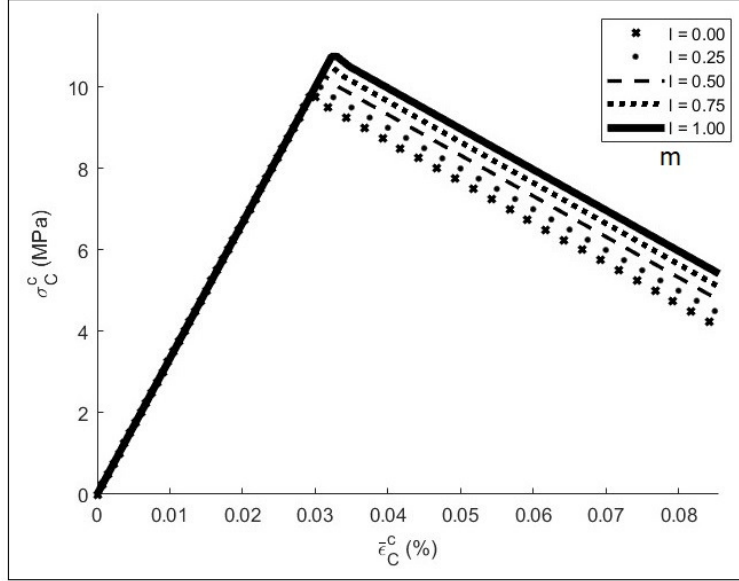


Figura 4: Evolução da deformação cisalhante de Cosserat média ao longo do carregamento para diferentes comprimentos característicos.

a instabilidade no sistema. Ainda, perscrutando a expressão para  $\bar{d}\epsilon_C^{cp}$ , nota-se que é o comprimento característico que definiria a espessura da banda de cisalhamento localizada, tendo-se espessuras maiores para comprimentos característicos também maiores. Em outras palavras, o fenômeno da localização da deformação em um meio contínuo de Cosserat é dependente tão somente do comprimento característico. Em termos de modelos numéricos com malha, é sugestivo que a geometria básica da banda de cisalhamento localizada dependa do comprimento característico do meio e não do tamanho dos elementos da malha. Todavia, é mister destacar que a interpolação dos campos físicos é feita em termos dos nós da malha quando são apresentados os resultados das simulações numéricas. Como consequência, malhas muito pobres em termos de discretização do meio podem enganosamente carregar consigo uma dependência das características geométricas da porção localizada em relação ao tamanho dos elementos utilizados mesmo quando se vale da mecânica de Cosserat. Porém, em termos práticos, pequenos aumentos na discretização do meio já realçam que o controle da geometria da banda localizada é dependente apenas do comprimento característico do material do modelo.

Com o intuito de se estudar numericamente as dependências do comprimento característico e do tamanho dos elementos da malha no estabelecimento da espessura da porção com localização da deformação ao se valer

da mecânica dos meios contínuos de Cosserat, implementou-se o comportamento elastoplástico com *softening* pela mecânica de Cosserat em cima de uma estrutura básica para soluções de equações diferenciais pelo método das diferenças finitas presente em Gerya (2019). Os modelos encerram largura de 1 m na horizontal e comprimento de 5 m na vertical. Os modelos não se movimentam na direção vertical, suas bases são fixas mesmo na direção horizontal e foram impostos deslocamentos progressivos horizontais no topo dos modelos para impingir cisalhamento dextral. As demais condições e o comportamento dos modelos seguem a linha do modelo anterior. Foram utilizados  $G = 5$  GPa,  $G_r = 2.5$  GPa,  $h = -0,5$  GPa,  $\sigma_Y = 20$  MPa e  $\sigma_{0m} = 10$  MPa. As simulações combinam comprimentos característicos de 0, 25, 0, 5, 1, 2, 5 e 5 m e número de elementos das malhas de 10, 25, 50, 100 e 250. O carregamento incremental dos modelos se dá até que ocorra plastificação em alguma porção deles, haja vista que a partir daí os modelos encerrariam *softening*, ocorrendo o descarregamento elástico. A Figura 5 mostra os resultados para a espessura da porção com localização da deformação em plastificação (cinza) em cada uma das combinações para o contínuo de Cosserat e, para efeito de comparação, ao se valer do contínuo clássico. Cotejando os modelos pela mecânica do contínuo de Cosserat, vê-se que com uma discretização razoável, acima de 10 elementos, o controle da espessura da zona plastificada é dado pelo comprimento característico e não pelo número de elementos da malha, sendo maior aquela quanto maior for o último. Diferentemente, nos modelos pela mecânica do contínuo clássico há forte controle da espessura da zona com localização da deformação pelo nível de discretização da malha nos modelos, obtendo-se espessuras cada vez menores quanto maior for o número de elementos da malha. Como corolário, fica claro que ao se analisar aspectos geométricos das zonas plastificadas quando se trabalha com modelos numéricos com malha, em especial suas espessuras, a utilização da formulação acerca da mecânica de Cosserat mostra-se como uma excelente técnica de regularização. Reforça-se ainda que é mister analisar com parcimônia tais aspectos geométricos quando se vale tão somente da formulação do contínuo clássico.

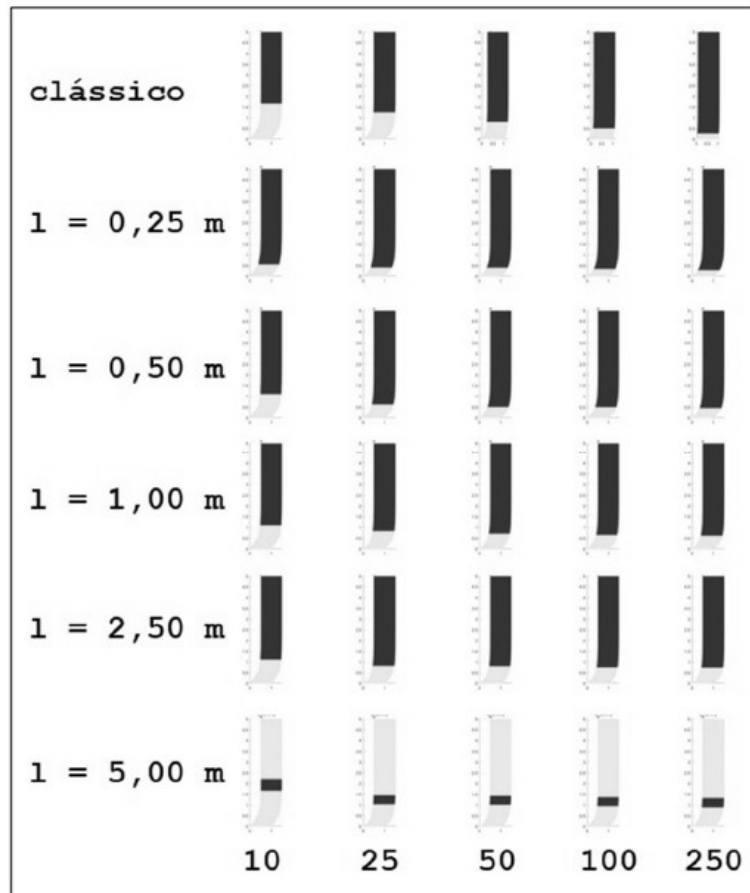


Figura 5: Espessura da porção com localização da deformação em modelos numéricos com diferentes comprimentos característicos e com malhas com diferentes tamanhos dos elementos utilizando a mecânica do contínuo de Cosserat.

## Referências

Gerya, T. 2019. *Introduction to numerical geodynamic modelling*. Cambridge University Press, Cambridge.

Em um texto claro e extremamente didático, o autor desenvolve passo a passo a metodologia para a implementação computacional de problemas geodinâmicos pelo método das diferenças finitas. São implementados programas completos para a análise em duas dimensões dos processos de subducção, do encurtamento e da extensão da litosfera, da intrusão de corpos, de convecção mantélica, da formação do núcleo, de comportamento fluidotermomecânico do manto e da sismologia de terremotos. A exposição sobre a teoria acerca da geodinâmica é exposta de forma bastante direta, haja vista que o objetivo do livro é o completo entendimento numérico do tema. Há por volta de sessenta exercícios, a maioria para a programação numérica sobre o que fora exposto, sendo disponibilizadas as soluções integradas em códigos em MATLAB pela rede mundial de computadores.

Liu, J. 2018. *Numerical investigations of the strain localization in geotechnical engineering within the framework of micropolar theory*. Tese de Doutorado, École Centrale de Nantes, Nantes.

Liu, J., Wu, L., Yin, K., Song, C., Bian, X., e Li, S. 2022. Methods for solving finite element mesh-dependency problems in geotechnical engineering - A review. *Sustainability*, 14:2982.

Moraes, A. 2016. *Mecânica do contínuo para a geologia estrutural*. PerSe, São Paulo.

Sabet, S. e De Borst, R. 2019. Structural softening, mesh dependence, and regularisation in non-associated plastic flow. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 43:2170–2183.